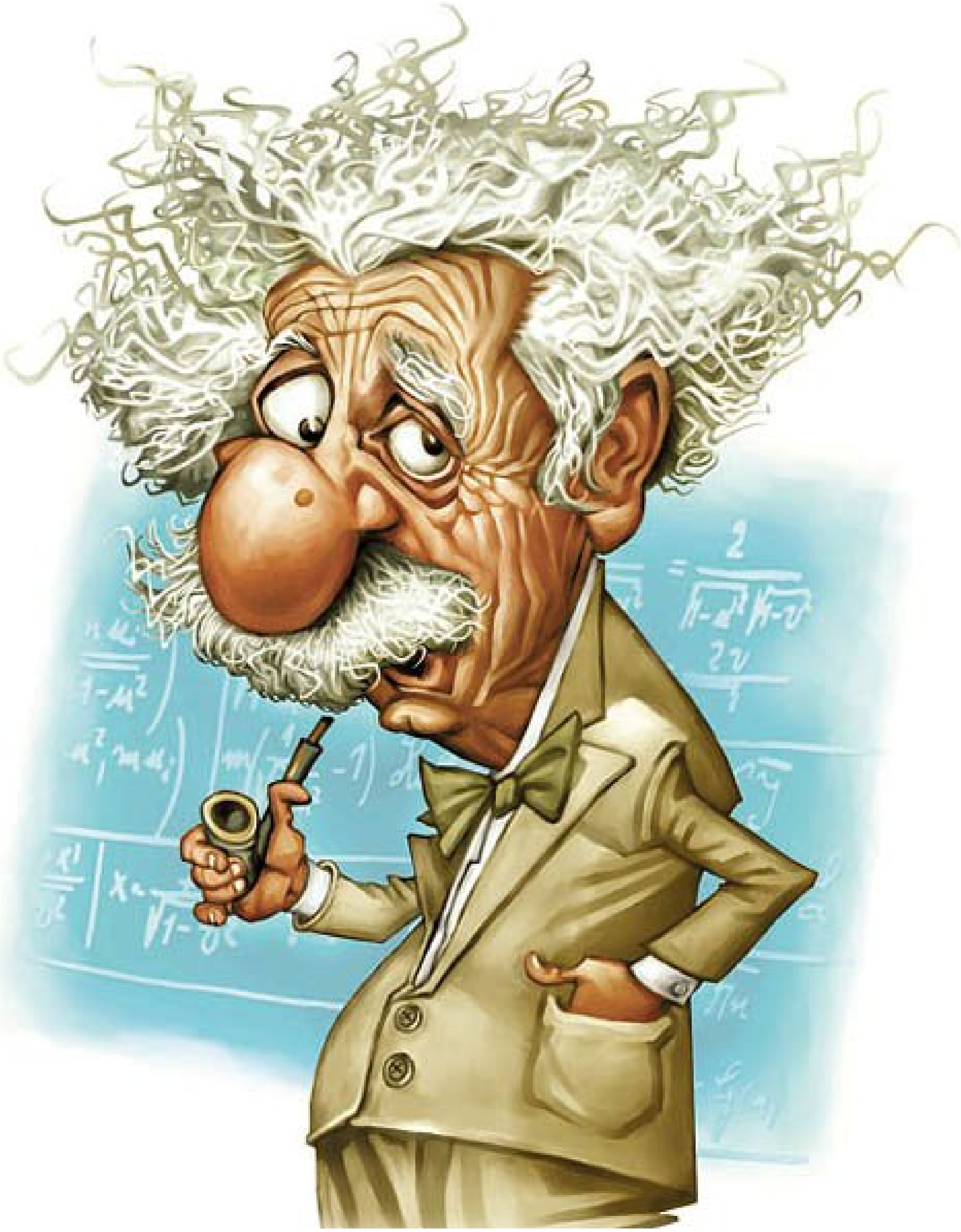

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2014
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι ΕΠΑΛ

Επιμελεια: Τακης Τσακαλακος

1ο ΘΕΜΑ

Α1. Δινεται μια συναρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Να δωσετε τον ορισμο της συνεχειας της f στο διαστημα $[\alpha, \beta]$.

Μοναδες 6

Α2. Να χαρακτηρισετε τις προτασεις που ακολουθουν, γραφοντας στο τετραδιο σας διπλα στο γραμμα που αντιστοιχει σε καθε προταση τη λεξη **Σωστο**, αν η προταση ειναι σωστη, η **Λαθος**, αν η προταση ειναι λανθασμενη.

α) Αν η f ειναι συνεχης στο $[\alpha, \beta]$ και η F ειναι μια παραγουσα της f, τοτε ισχυει :
$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha)$

(μοναδες 2)

β) Το ευρος των τιμων μιας μεταβλητης δεν επηρεαζεται απο τις ακραιες τιμες της.

(μοναδες 2)

γ) Αν η συναρτηση f ειναι παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$ μια σταθερα. τοτε ισχυει $(c \cdot fx)'(x) = f'(x) + c$.

(μοναδες 2)

δ) $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha+1}$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

(μοναδες 2)

ε) Αν η f ειναι συνεχης στο $[\alpha, \beta]$, τοτε ισχυει :
$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx$.

(μοναδες 2)

Μοναδες 10

Α3. Να μεταφερετε στο τετραδιο σας τις παρακατω ισοτητες και να τις συμπληρωσετε:

α) Αν οι συναρτησεις f, g ειναι παραγωγισιμες στο $\mathbb{R}$, τοτε:
$(f - g)'(x) = \ldots$

(μοναδες 3)

β) $\int_{\alpha}^{\beta} \sigma\upsilon\nu x\,dx = \ldots$

(μοναδες 3)

γ) Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$, τοτε : $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \ldots$

(μοναδες 3)

Μοναδες 9

1ο ΛΥΣΗ

Α1.

Μια συναρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ λεγεται συνεχης σ'ενα διαστημα $[\alpha,\beta]$, αν ειναι συνεχης σε καθε $x_0\in(\alpha,\beta)$ και επιπλεον εχουμε οτι :

$\lim_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha)$, $\lim_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)$

Α2.

α) Σωστο
β) Λαθος
γ) Λαθος
δ) Λαθος
ε) Σωστο

Α3.

α)
$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$
β)
$\int_\alpha^\beta \sigma\upsilon\nu x\,dx=[\eta\mu x]_\alpha^\beta=\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha$
γ)
$\lim_{x\to x_0}|f(x)|=|\ell|$

2ο ΘΕΜΑ

Δινεται η συνεχης συναρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποια ισχυει:
$x \cdot f(x) - 2 \cdot f(x) = x^2 - 4$ για καθε $x \in \mathbb{R}$.

Β1. δειξετε οτι: $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, για $x \neq 2$.

Μοναδες 7

Β2. Να βρειτε το: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Μοναδες 9

Β3. Να βρειτε το $f(2)$.

Μοναδες 9

2ο ΛΥΣΗ

B1.

$x \cdot f(x) - 2 \cdot f(x) = x^2 - 4 \Leftrightarrow (x-2) \cdot f(x) = x^2 - 4 \Leftrightarrow$

$f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$, για $x \neq 2$.

B2.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 2+2 = 4$$

B3.

Η f ειναι συνεχης στο $\mathbb{R}$, οποτε ειναι συνεχης και στο $x_0 = 2$.

Ετσι

$$f(2) = \lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

3ο ΘΕΜΑ

Στο παρακατω πινακα παρουσιαζονται οι ηλικιες των υπαλληλων μιας εταιρειας :

Α/Α	Ηλικιες υπαλληλων	Συχνοτητα (αριθμος υπαλληλων) v_i	Κεντρο Κλασης x_i	$x_i \cdot v_i$	Σχετικη Συχνοτητα $f_i\%$
1η κλαση	[25, 35)	100			
2η κλαση	[35, 45)	50			
3η κλαση	[45, 55)	40			
4η κλαση	[55, 65)	10			
Συνολα		$v = 200$			

Γ1. Να μεταφερετε στο τετραδιο τον παραπανω πινακα και να τον συμπληρωσετε .

Μοναδες 7

Γ2. Να υπολογισετε τη μεση ηλικια των υπαλληλων .

Μοναδες 5

Γ3. Να υπολογισετε ποσοστο των υπαλληλων που εχουν ηλικια τουλαχιστον σαραντα πεντε (45) ετων .

Μοναδες 4

Γ4. Απο την εταιρεια αποχωρουν πεντε (5) υπαλληλοι της 4ης κλασης, πεντε (5) υπαλληλοι της 2ης κλασης και ταυτοχρονα προσλαμβανονται δεκα (10) υπαλληλοι με ηλικιες στη 1ης κλαση . Να υπολογισετε τη νεα μεση τιμη της ηλικιας των υπαλληλων .

Μοναδες 9

3ο ΛΥΣΗ

Γ1

Α/Α	Ηλικιες υπαλληλων	Συχνοτητα (αριθμος υπαλληλων) v_i	Κεντρο Κλασης x_i	xi·vi	Σχετικη Συχνοτητα $f_i\%$
1η κλαση	[25, 35)	100	30	3000	50
2η κλαση	[35, 45)	50	40	2000	25
3η κλαση	[45, 55)	40	50	2000	20
4η κλαση	[55, 65)	10	60	600	5
Συνολα		ν = 200		7600	100

Γ2.

Ειναι

$$\bar{x} = \frac{1}{v} \cdot \sum_{i=1}^{4} x_i v_i = \frac{1}{200} \cdot 7600 = 38$$

Γ3:

Το ποσοστο των υπαλληλων που εχουν ηλικια τουλαχιστον 45 ετη ειναι :

$$f_3\% + f_4\% = 20\% + 5\% = 25\%$$

Γ4:

Αν $\overline{x'}$ ειναι η νεα μεση τιμη ηλικιων, τοτε

$$\overline{x'} = \frac{30 \cdot 110 + 40 \cdot 45 + 50 \cdot 40 + 60 \cdot 5}{200} = \frac{3300 + 1800 + 2000 + 300}{200} = \frac{7400}{200} = 37$$

4ο ΘΕΜΑ

Δινεται η συναρτηση $f(x) = e^x \cdot (x-1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδειξετε οτι :

$f'(x) = f(x) + e^x$.

Μοναδες 6

Δ2. Να μελετησετε τη συναρτηση f ως προς τη μονοτονια και να βρειτε τα τοπικα της ακροτατα.

Μοναδες 9

Δ3. Αν $g(x) = f(x) + e^x$, $x \in \mathbb{R}$, να υπολογισετε το εμβαδον του χωριου που περικλειεται απο τη γραφικη παρασταση της συναρτησης g , τον αξονα x′x και τις ευθειες με εξισωσεις $x = -1$ και $x = 1$.

των συναρτησεων g(x) και h(x) .   .

Μοναδες 10

4ο ΛΥΣΗ

Δ1

Η f ειναι παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = (e^x \cdot (x-1))' = (e^x)' \cdot (x-1) + e^x \cdot (x-1)' = e^x \cdot (x-1) + e^x \cdot 1 =$$
$$= e^x \cdot (x-1) + e^x = f(x) + e^x$$

Δ2

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + e^x = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot (x-1) + e^x = 0 \Leftrightarrow$

  $e^x \cdot (x - 1 + 1) = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot x = 0 \overset{e^x \neq 0}{\Leftrightarrow} \Leftrightarrow x = 0$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) + e^x > 0 \Leftrightarrow e^x \cdot (x-1) + e^x > 0 \Leftrightarrow$

  $e^x \cdot (x - 1 + 1) > 0 \Leftrightarrow e^x \cdot x > 0 \overset{e^x > 0}{\Leftrightarrow} x > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f ′	-	0	+
f	↘		↗

- Η f γν.αυξουσα στο$[0,+\infty)$
- Η f γν.φθινουσα στο $(-\infty,0]$
- Η f παρουσιαζει ελαχιστο για $x = 0$ το $f(0) = e^0 \cdot (0-1) = -1$.

Δ3

- $g(x) = f'(x) = e^x \cdot x$

Ο πινακας προσημου της g' δινει

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
g'	+		-	0	+		

Ετσι,το ζητουμενο εμβαδον:

$$E(\Omega) = \int_{-1}^{1} |g(x)|\,dx = -\int_{-1}^{0} g(x)\,dx + \int_{0}^{1} g(x)\,dx = -\int_{-1}^{0} f'(x)\,dx + \int_{0}^{1} f'(x)\,dx =$$
$$= -[f(x)]_{-1}^{0} + [f(x)]_{0}^{1} = -(f(0) - f(-1)) + (f(1) - f(0)) = -f(0) + f(-1) + f(1) - f(0) =$$
$$= f(-1) + f(1) - 2f(0) = e^{-1}(-1-1) + e^{1}(1-1) - 2e^{0}(0-1) = -2e^{-1} - 2\cdot 1\cdot(-1) =$$
$$= -2e^{-1} + 2 = \left(2 - \frac{2}{e}\right) \text{τ.μ.}$$