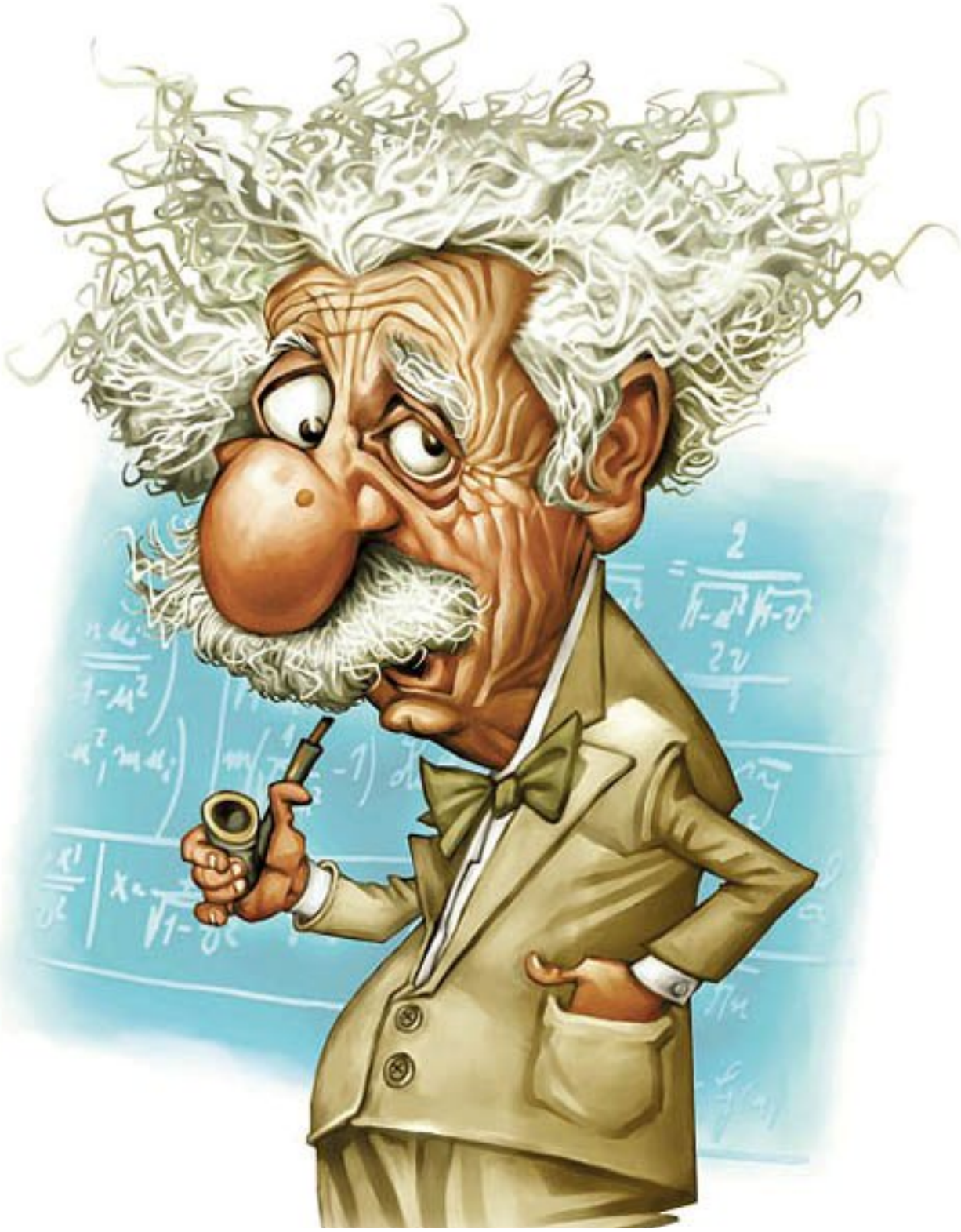

enikos.gr
εδώ μιλάμε στον ενικό

εδώ μιλάμε
στον ενικό!

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2014
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Επιμελεια: Τακης Τσακαλακος

1ο ΘΕΜΑ

Α1. Εστω μια συναρτηση f ορισμενη σε ενα διαστημα Δ. Αν

- η f ειναι συνεχης στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για καθε εσωτερικο σημειο x του Δ,

τοτε να αποδειξετε οτο η f ειναι σταθερη σε ολο το διαστημα Δ .

Μοναδες 8

Α2. Εστω μια συναρτηση f συνεχης σε ενα διαστημα Δ και παραγωγισιμη στο εσωτερικο του Δ . Ποτε λεμε οτι η συναρτηση η f στερφει τα κοιλα προς τα κατω η ειναι κοιλη στο Δ ;

Μοναδες 4

Α3. Εστω μια συναρτηση f με πεδιο ορισμου το A. Ποτε λεμε οτι η f παρουσιαζει στο $x_0 \in A$ (ολικο) μεγιστο, το $f(x_0)$;

Μοναδες 4

Α4. Να χαρακτηρισετε τις προτασεις που ακολουθουν, γραφοντας στο τετραδιο σας διπλα στο γραμμα που αντιστοιχει σε καθε προταση τη λεξη **Σωστο**, αν η προταση ειναι σωστη, η **Λαθος**, αν η προταση ειναι λανθασμενη.

α) Για καθε $z \in \mathbb{C}$ ισχυει $z - \bar{z} = 2Im(z)$

(μοναδες 2)

β) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ η $-\infty$, τοτε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

(μοναδες 2)

γ) Αν μια συναρτηση f παρουσιαζει (ολικο) μεγιστο, τοτε αυτο θα ειναι το μεγαλυτερο απο τα τοπικα της μεγιστα .

(μοναδες 2)

δ) Αν μια συναρτηση f ειναι συνεχης σε ενα διαστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τοτε ισχυει

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx$$

(μοναδες 2)

ε) Εστω συναρτηση f συνεχης σε ενα διαστημα Δ και παραγωγισιμη στο εσωτερικο του Δ . Αν η συναρτηση f ειναι γνησιως φθινουσα στο Δ, τοτε η παραγωγος της ειναι υποχρεωτικα αρνητικη στο εσωτερικο του Δ.

(μοναδες 2)

Μοναδες 10

Προσφορα του enikos.gr και του http://drmaths58demo.blogspot.gr

1ο ΛΥΣΗ

Α1.

Αρκει να αποδειξουμε οτι για οποιαδηποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχυει $f(x_1) = f(x_2)$. Πραγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τοτε προφανως $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τοτε στο διστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιει τις υποθεσεις του θεωρηματος μεσης τιμης. Επομενως, υπρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τετοιο, ωστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \qquad (1)$$

Επειδη το ξ ειναι εσωτερικο σημειο του Δ, ισχυει $f'(\xi) = 0$, οποτε, λογω της (1), ειναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_1 < x_2$, τοτε ομοιως αποδεικνυεται οτι $f(x_1) = f(x_2)$.

Σε ολες, λοιπον, τις περιπτωσεις ειναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Α2.

Εστω μια συναρτηση f σ υ ν ε χ η ς σ' ενα διαστημα Δ και π α ρ α γ ω γ ι σ ι μ η στο ε σ ω τ ε ρ ι κ ο του Δ. Θα λεμε οτι:

- Η συναρτηση f *στρεφει τα κοιλα προς τα κατω η ειναι κοιλη* στο Δ, αν η ειναι γνησιως φθινουσα στο ε σ ω τ ε ρ ι κ ο του Δ.

Α3.

Μια συναρτηση f με πεδιο ορισμου A θα λεμε οτι:

Παρουσιαζει στο $x_0 \in A$ *(ολικο) μεγιστο*, το $f(x_0)$, οταν $f(x) \le f(x_0)$ για καθε $x \in A$.

Α4.

α) Λαθος
β) Σωστο
γ) Σωστο
δ) Σωστο
ε) Λαθος

Προσφορα του enikos.gr και του http://drmaths58demo.blogspot.gr

2ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η εξίσωση

$2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0, \quad z \in \mathbb{C}$

Β1. Να λυσετε την παραπανω εξισωση

Μοναδες 9

Β2. Αν $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = 1 - i$ ειναι οι ριζες της παραπανω εξισωσης, τοτε να αποδειξετε οτι ο αριθμος

$$w = 3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39}$$

ειναι ισος με $-3i$

Μοναδες 8

Β3. Να βρειτε το γεωμετρικο τοπο των εικονων των μιγαδικων αριθμων u για τους οποιους ισχυει

$|u + w| = |4z_1 - z_2 - i|$

οπου w, z_1, z_2 οι μιγαδικοι αριθμοι του ερωτηματος B_2.

Μοναδες 8

Προσφορα του enikos.gr και του http://drmaths58demo.blogspot.gr

2ο ΛΥΣΗ

Β1.

$2|z|^2+(z+\bar{z})i-4-2i=0 \quad (1), \quad z\in\mathbb{C}$

Εστω $z=x+yi$ $(\bar{z}=x-yi)$, οποτε η (1)

$$2\sqrt{x^2+y^2}^{\,2}+(x+yi+x-yi)i-4-2i=0 \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2xi-4-2i=0 \Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2-2+(x-1)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+y^2-2=0 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y=1 \\ y=-1 \end{cases} \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1=1+i \\ z_2=1-i \end{cases}$$

Β2.

Ειναι

$$\bullet\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{(1+i)^2}{2}=\frac{1+2i+i^2}{2}=\frac{1+2i-1}{2}=\frac{2i}{2}=i$$

Ετσι

$$w=3\cdot\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39}=3\cdot i^{39}=3\cdot i^{4\cdot 9+3}=3\cdot(i^4)^9\cdot i^3=3\cdot i^3=-3\cdot i$$

Β3.

Ειναι

$z_1=1+i, \quad z_2=1-i$ και $w=-3i$

Ετσι

$|u+w| = |4z_1 - z_2 - i| \Leftrightarrow |u-3i| = |4+4i-1+i-i| \Leftrightarrow |u-3i| = |3+4i| \Leftrightarrow$
$|u-3i| = \sqrt{9+16} \Leftrightarrow |u-3i| = \sqrt{25} \Leftrightarrow |u-(0+3i)| = 5$

Οποτε, η εικονα M(u) του μιγαδικου αριθμου u κινειται σε κυκλο κεντρου K(0, 3) και ακτινας ρ = 5 .

Προσφορα του enikos.gr και του http://drmaths58demo.blogspot.gr

3ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η συναρτηση $h(x) = x - \ln(e^x + 1),\ x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να μελετησετε την h ως προς την κυρτοτητα .

Μοναδες 5

Γ2. Να λυσετε την ανισωση

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1}\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

Μοναδες 7

Γ3. Να βρειτε την οριζοντια ασυμπτωτη της γραφικης παραστασης της h στο $+\infty$, καθως και την πλαγια ασυμπτωτη της στο $-\infty$.

Μοναδες 6

Γ4. Δίνεται η συναρτηση $\varphi(x) = e^x\,(\ln(x) + \ln 2),\ x \in \mathbb{R}$

Να βρειτε το εμβαδον του χωριου που περικλειεται απο τη γραφικη παρασταση της $\varphi(x)$, τον αξονα $x'x$ και την ευθεια $x = 1$.

Μοναδες 7

Προσφορα του enikos.gr και του http://drmaths58demo.blogspot.gr

3ο ΛΥΣΗ

Γ1

• $A_h = \mathbb{R}$

Η h ειναι συνεχης και δυο φορες παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$ (πραξεις παραγωγισιμων) με

• $h'(x) = 1 - \frac{1}{e^x+1}(e^x+1)' = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1} > 0$ για καθε $x \in \mathbb{R}$

• $h''(x) = -\frac{1}{(e^x+1)^2}(e^x+1)' = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2} < 0$ για καθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδη η h ειναι κοιλη στο $\mathbb{R}$

Γ2.

Η h ειναι γν. αυξουσα στο $\mathbb{R}$, αφου $h(x) > 0$ για καθε $x \in \mathbb{R}$.

• $h(1) = 1 - \ln(e+1) = \ln e - \ln(e+1) = \frac{\ln e}{\ln(e+1)}$ και η ανισωση δινει:

$$\ln e^{h(2h'(x))} < \frac{\ln e}{\ln(e+1)} \Leftrightarrow h(2h'(x)) < h(1) \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} 2h'(x) < 1 \Leftrightarrow h'(x) < \frac{1}{2} \overset{h'(x)=\left(\frac{1}{e^x+1}\right)'=\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow}$$

$$h'(x) < h'(0) \overset{h'\downarrow}{\Leftrightarrow} x > 0$$

Γ3:

• $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}[x - \ln(e^x+1)] \overset{\ln e^x = x}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}[\ln e^x - \ln(e^x+1)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\frac{e^x}{e^x+1}\right] = \ln 1 = 0$ αφου

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DHL}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(e^x+1)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$$

Ετσι η $y = 0$ ειναι οριζοντια ασυμπτωτη της C_h στο $+\infty$.

• $\begin{cases} \lambda = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-\ln(e^x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 - \ln(e^x+1)\frac{1}{x}\right) = 1 - 0\cdot 0 = 1 \\ \mu = \lim\limits_{x\to-\infty}(h(x)-x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x - \ln(e^x+1) - x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-\ln(e^x+1)) = 0 \end{cases}$

Ετσι η $y = x$ ειναι πλαγια ασυμπτωτη της C_h στο $+\infty$.

Γ4:

$\varphi(x) = e^x(x - \ln(e^x+1) + \ln 2) = e^x(\ln e^x - \ln(e^x+1) + \ln 2) = e^x \cdot \ln\frac{2e^x}{e^x+1}$, με $A_\varphi = \mathbb{R}$

• $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot \ln\frac{2e^x}{e^x+1} = 0 \overset{e^x\neq 0}{\Leftrightarrow} \ln\frac{2e^x}{e^x+1} = \ln 1 \Leftrightarrow \frac{2e^x}{e^x+1} = 1 \Leftrightarrow 2e^x = e^x+1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow$

$x = 0$

• $\varphi(x) > 0 \Leftrightarrow e^x \cdot \ln\frac{2e^x}{e^x+1} > 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} \ln\frac{2e^x}{e^x+1} > \ln 1 \Leftrightarrow \frac{2e^x}{e^x+1} > 1 \Leftrightarrow 2e^x > e^x+1 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow$

$x > 0$

• Η φ ειναι συνεχης στο $[0,1]$ (πραξεις συνεχων) με $\varphi(x) > 0$.

Ετσι

$$E(\Omega) = \int_0^1 \varphi(x)\,dx = \int_0^1 e^x \cdot \ln\frac{2e^x}{e^x+1}\,dx = \int_0^1 (e^x)' \cdot \ln\frac{2e^x}{e^x+1}\,dx =$$

$$= \left[e^x \cdot \ln\frac{2e^x}{e^x+1}\right]_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot \left(\ln\frac{2e^x}{e^x+1}\right)'dx = e\ln\frac{2e}{e+1} - \int_0^1 e^x \cdot \frac{e^x+1}{2e^x}\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)'dx =$$

Προσφορα του enikos.gr και του http://drmaths58demo.blogspot.gr

3ο ΛΥΣΗ

$$= e\ln\frac{2e}{e+1} - \frac{1}{2}\int_0^1 (e^x+1)\frac{2e^x(e^x+1)-2e^{2x}}{(e^x+1)^2}\,dx = e\ln\frac{2e}{e+1} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2e^{2x}+2e^x-2e^{2x}}{e^x+1}\,dx =$$

$$= e\ln\frac{2e}{e+1} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2e^x}{e^x+1}\,dx = e\ln\frac{2e}{e+1} - \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = e\ln\frac{2e}{e+1} - \int_0^1 (\ln(e^x+1))'\,dx =$$

$$= e\ln\frac{2e}{e+1} - [\ln(e^x+1)]_0^1 = e\ln\frac{2e}{e+1} - [\ln(e+1)-\ln 2] = \ln\frac{2^e e^e}{(e+1)^e} - \ln\frac{e+1}{2} = \ln\frac{\frac{2^e e^e}{(e+1)^e}}{\frac{e+1}{2}} =$$

$$= \ln\frac{2^{e+1}\cdot e^e}{(e+1)^{e+1}} = \ln\left[e^e\cdot\left(\frac{2}{e+1}\right)^{e+1}\right] \text{ τ.μ.}$$

Προσφορά του enikos.gr και του http://drmaths58demo.blogspot.gr

4ο ΘΕΜΑ

Δινεται η συναρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

Δ1. Να αποδειξετε οτι η f ειναι συνεχης στο σημειο $x_0 = 0$ και, στη συνεχεια, οτι ειναι γνησιως αυξουσα .

Μοναδες 8

Δ2. Δινεται επιπλεον οτι η f ειναι κυρτη .

α) να αποδειξετε οτι η εξισωση

$$\int_1^{2f'(x)} f(u)\,du = 0$$

εχει ακριβως μια λυση, η οποια ειναι η $x = 0$

(μοναδες 7)

β) Ενα υλικο σημειο Μ ξεκινα τη χρονικη στιγμη $t = 0$ απο ενα σημει $A(x_0 , f(x_0))$ με $x_0 < 0$ και κινειται κατα μηκος της καμπυλης $y = f(x)$, $x \geq x_0$ με $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \geq 0$. Σε ποιο σημειο της καμπυλης ο ρυθμος μεταβολης της τετμημενης $x(t)$ του σημειου Μ ειναι διπλασιος του ρυθμου μεταβολης της τεταγμενης $y(t)$, αν υποτεθει οτι $x'(t) > 0$ για καθε $t \geq 0$.

(μοναδες 4)

Μοναδες 11

Δ3. Θεωρουμε τη συναρτηση

$g(x) = (xf(x) + 1 - e)^2(x - 2)^2$, $x \in (0, +\infty)$

Να αποδειξετε οτι η συναρτηση g εχει δυο θεσεις τοπικων ελαχιστων και μια θεση τοπικου μεγιστου .

Μοναδες 7

Προσφορα του enikos.gr και του http://drmaths58demo.blogspot.gr

4ο ΛΥΣΗ

Δ1

• $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DHL}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{1} = 1$ και $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

Οποτε η f ειναι συνεχης στο $x_0 = 0$

• Για $x \neq 0$: $f'(x) = \dfrac{e^x\cdot x-(e^x-1)}{x^2} = \dfrac{e^x\cdot x - e^x+1}{x^2}$

Θεωρουμε τη συναρτηση $h(x) = e^x\cdot x - e^x + 1,\ x\in\mathbb{R}$

• $h'(x) = (e^x\cdot x - e^x+1)' = e^x + e^x\cdot x - e^x = e^x\cdot x$

• $h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x\cdot x = 0 \overset{e^x\neq 0}{\Leftrightarrow} x = 0$

• $h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x\cdot x > 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} x > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h'	-		+
h	↘		↗

Ο.Ε.

Η h παρουσιαζει ολικο ελαχιστο στο $x_0 = 0$, οποτε $h(x)\geq h(0) \Leftrightarrow h(x)\geq 0,\ x\in\mathbb{R}$

$f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2} \overset{h(x)\geq 0}{>} 0$ για καθε $x\neq 0$ που σημαινει οτι η f ειναι γν.αυξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ2

α)

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-1}{x} = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DHL}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x-1)'}{x'} = +\infty$

Οποτε $f(\mathbb{R}) = (\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty}) = (0,+\infty)$ με την f γν. αυξουσα στο $\mathbb{R}$.

Ετσι, $f(x) > 0$ για καθε $x\in\mathbb{R}$

Για την εξισωση: $\int_1^{2f'(x)} f(u)\,du = 0$

• Αν $2f'(x) > 1 \overset{f(x)>0}{\Rightarrow} \int_1^{2f'(x)} f(u)\,du > 0$ ατοπο

• Αν $2f'(x) < 1 \overset{f(x)>0}{\Rightarrow} \int_1^{2f'(x)} f(u)\,du < 0$ ατοπο

Αρα, $2f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2}$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \overset{f(0)=1}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DHL}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DHL}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

Αρα η $x = 0$ ειναι μοναδικη λυση, αφου η f' ειναι γν.αυξουσα.

β)

Στο σημειο που ο ρυθμος μεταβολης της τετμημενης x(t) ειναι διπλασιος του ρυθμου μεταβολης της τεταγμενης y(t) ισχυει:

$$x'(t) = [2f(x(t))]' \Leftrightarrow x'(t) = 2f'(x(t))\cdot x(t)' \overset{x(t)'>0}{\Leftrightarrow} f'(x(t)) = \frac{1}{2} \overset{f'(0)=\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} f'(x(t)) = f'(0) \underset{f'\ 1\text{-}1}{\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}}$$

$x(t) = 0$

Ακομη $y(t) = f(0) = 1$

Προσφορα του enikos.gr και του http://drmaths58demo.blogspot.gr

4ο ΛΥΣΗ

Οποτε το ζητουμενο σημειο ειναι :
$M(x(t), y(t)) = M(0, 1)$

Δ3

Ειναι

- $g(x) = (xf(x) + 1 - e)^2(x - 2)^2 = (x \cdot \frac{e^x - 1}{x} + 1 - e)^2(x - 2)^2 =$
  $= (e^x - e)^2(x - 2)^2$
- $g'(x) = [(e^x - e)^2(x - 2)^2]' = 2(e^x - e) \cdot e^x \cdot (x - 2)^2 + 2(e^x - e)^2(x - 2) =$
  $= 2(e^x - e) \cdot (x - 2)(e^x \cdot (x - 2) + e^x - e) =$
  $= 2(e^x - e) \cdot (x - 2)(e^x \cdot x - 2e^x + e^x - e) =$
  $= 2(e^x - e) \cdot (x - 2)(xe^x - e^x - e)$

Θεωρουμε τη συναρτηση: $h(x) = xe^x - e^x - e, \quad x \in (0, +\infty)$

- $h'(x) = (xe^x - e^x - e)' = e^x + xe^x - e^x = xe^x > 0$
  Αρα η h ειναι γν.αυξουσα .
- $h(1) = (1 \cdot e^1 - e^1 - e) = -e < 0$
  $h(2) = (2 \cdot e^2 - e^2 - e) = e^2 - e = e(e - 1) > 0$

Ετσι

- Η h ειναι συνεχης στο [1,2]
- $h(1) \cdot h(2) < 0$

Συμφωνα με το Θεωρημα Bolzano, υπαρχει $x_0 \in (1, 2)$ τετοιο ωστε:
$h(x_0) = 0$ που ειναι μοναδικο γιατι η h ειναι γν.αυξουσα.

- Για $x > x_0 \Leftrightarrow h(x) > h(x_0) \Leftrightarrow h(x) > 0$
- Για $x < x_0 \Leftrightarrow h(x) < h(x_0) \Leftrightarrow h(x) < 0$

x	0	1	x_0	2	$+\infty$
$2(e^x - e)$	-	+	+	+	
$x - 2$	-	-	-	+	
$x \cdot e^x - e^x - e$	-	-	+	+	
g'	-	+	-	+	
g	↘	↗	↘	↗	
		Τ.Ε.	Τ.Μ.	Τ.Ε.	

Προσφορα του enikos.gr και του http://drmaths58demo.blogspot.gr