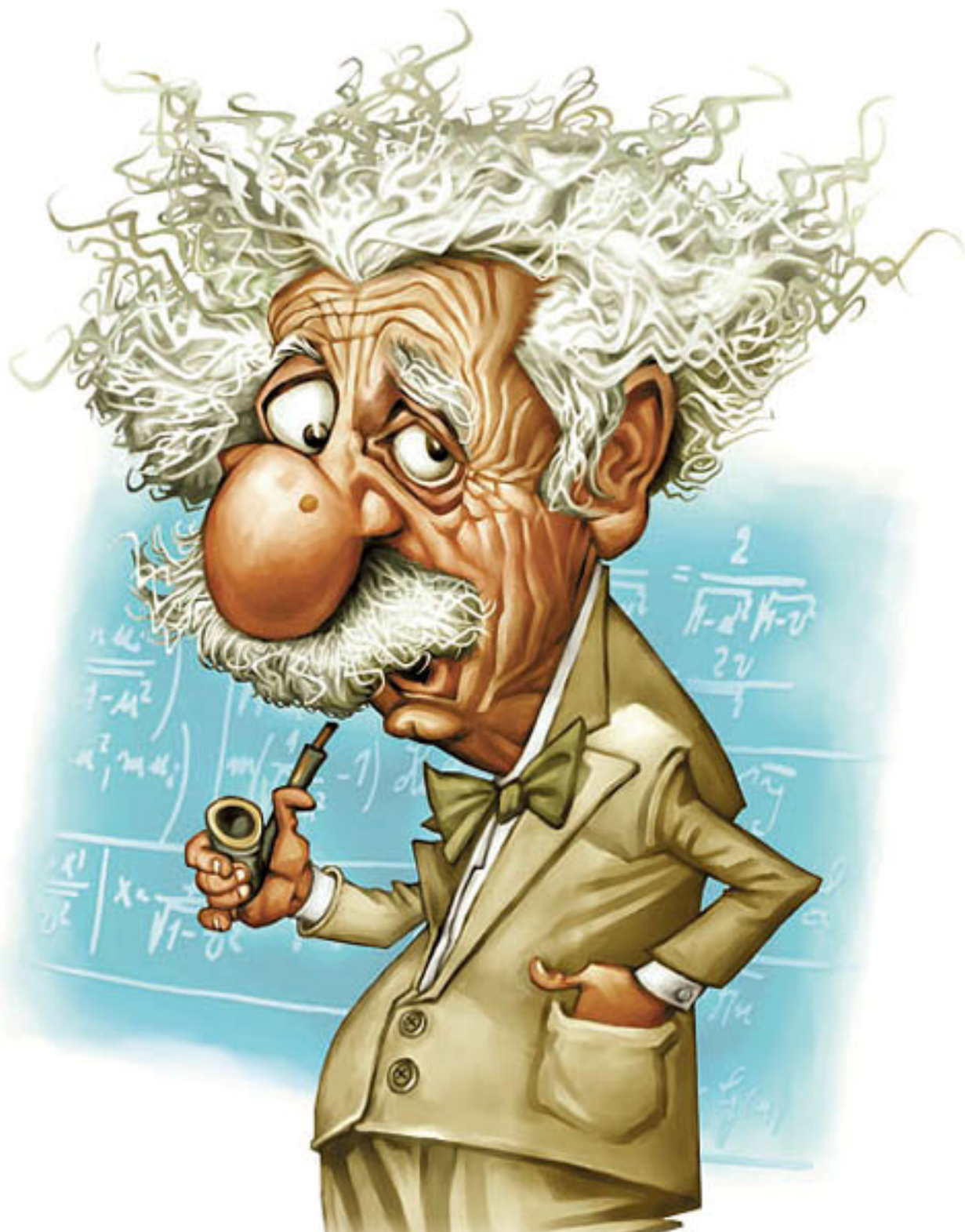




enikos.gr
εδώ μιλάμε στον ενικό

**εδώ μιλάμε
στον ενικό!**

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2013
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Επιμέλεια: Τάκης Τσακαλακός

1ο ΘΕΜΑ

- A1.** Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μια παραγούσα της f στο $[a, \beta]$, τότε να αποδείξετε ότι :

$$\int_a^\beta f(t) dt = G(\beta) - G(a)$$

Μονάδες 7

- A2.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

Μονάδες 4

- A3.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γραφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ^2 , όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

γ) Ισχύει ότι: $|ημx| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ) Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

ε) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί προσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

1ο ΛΥΣΗ

A1.

Συμφωνα με το θεωρημα,

"Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ , τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, $x \in \Delta$, είναι μια παραγούσα της f στο Δ .

Δηλαδή ισχύει: $(\int_a^x f(t) dt)' = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$."

η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ είναι μια παραγούσα της f στο $[a, \beta]$.

Επειδή και η G είναι μια παραγούσα της f στο $[a, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$G(x) = F(x) + c \quad (1)$$

Απο την (1), για $x = a$, έχουμε $G(a) = F(a) + c = \int_a^a f(t) dt + c = c$, οπότε $c = G(a)$ και η (1)

$G(x) = F(x) + G(a)$ που γίνεται για $x = \beta$:

$$G(\beta) = F(\beta) + G(a) \Rightarrow F(\beta) = G(\beta) - G(a) \Rightarrow \int_a^\beta f(t) dt = G(\beta) - G(a).$$

A2.

Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν:

- Είναι *συνεχής* στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$.
- Είναι *παραγωγίσιμη* στο ανοικτό διάστημα (a, β) .

Τότε υπάρχει *ένα τουλάχιστον* ξ που ανήκει στο (a, β) τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$$

A3.

Μια συνάρτηση f , είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (a, β) και επιπλέον:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}.$$

A4.

- α) Λαθος
- β) Σωστο
- γ) Σωστο
- δ) Λαθος
- ε) Σωστο

2ο ΘΕΜΑ

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(z - 2)(\overline{z} - 2) + |z - 2| = 2$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τοπος των εικονων των μιγαδικων z , είναι κυκλος με κεντρο $K(2, 0)$ και ακτινα $\rho = 1$ (μοναδες 5)

Στη συνέχεια, για καθε μιγαδικο z που ανηκει στον παραπανω γεωμετρικο τοπο, να αποδειξετε ότι $|z| \leq 3$ (μοναδες 3)

Μοναδες 8

B2. Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 που ανηκουν στον παραπανω γεωμετρικο τοπο είναι ριζες της εξίσωσης $w^2 + \beta w + \gamma = 0$, με w μιγαδικο αριθμο, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, και $|\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)| = 2$

τοτε να αποδειξετε ότι:

$$\beta = -4 \text{ και } \gamma = 5$$

Μοναδες 9

B3. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς a_0, a_1, a_2 οι οποίοι ανηκουν στον γεωμετρικο τοπο του ερωτηματος B1. Αν ο μιγαδικος αριθμος v ικανοποιει τη σχεση:

$$v^3 + a_2 v^2 + a_1 v + a_0 = 0$$

τοτε να αποδειξετε ότι :

$$|v| < 4$$

Μοναδες 8

2ο ΛΥΣΗ

B1.

$$\bullet (z-2)(\bar{z}-2) + |z-2| = 2 \Leftrightarrow |z-2|^2 + |z-2| - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |z-2|=1 \\ |z-2|=-2 \text{ απορρ.} \end{cases} \Rightarrow |z-2|=1$$

Δηλαδή, ο γεωμετρικός τοπος των εικονων των μιγαδικων z , είναι κυκλος με κεντρο το $K(2,0)$ και ακτινα $\rho = 1$.

• Για καθε z που ανηκει στον πιο πανω κυκλο είναι:

$$|z| = |z-2+2| \leq |z-2| + 2 \stackrel{|z-2|=1}{=} 1+2=3 \Rightarrow |z| \leq 3$$

B2.

• Αφου z_1, z_2 ριζες της $w^2 + \beta w + \gamma = 0$ είναι συζυγεις με $z_2 = \bar{z}_1$

• Ακομη $z_1 + z_2 = -\beta$ και $z_1 \cdot z_2 = \gamma$ (1)

$$\bullet z_1 + z_2 = -\beta \Leftrightarrow z_1 + \bar{z}_1 = -\beta \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z_1) = -\beta \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z_1) = -\frac{\beta}{2} \quad (2)$$

$$\bullet z_1 \cdot z_2 = \gamma \Leftrightarrow z_1 \cdot \bar{z}_1 = \gamma \Leftrightarrow |z_1|^2 = \gamma \quad (3)$$

$$\bullet |z_1 - 2| = 1 \Leftrightarrow |z_1 - 2|^2 = 1 \Leftrightarrow (z_1 - 2)(\bar{z}_1 - 2) = 1 \Leftrightarrow$$

$$z_1 \bar{z}_1 - 2(z_1 + \bar{z}_1) + 4 = 1 \Leftrightarrow |z_1|^2 - 4\operatorname{Re}(z_1) + 3 = 0 \stackrel{(2,3)}{\Leftrightarrow} \gamma + 2\beta + 3 = 0 \quad (4)$$

$$\bullet |\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)| = 2 \stackrel{z_1, z_2 \text{ συζυγεις}}{\Leftrightarrow} |2\operatorname{Im}(z_1)| = 2 \Leftrightarrow |\operatorname{Im}(z_1)| = 1 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z_1) = \pm 1$$

$$\bullet |z_1 - 2| = 1 \Leftrightarrow |-\frac{\beta}{2} \pm i - 2| = 1 \Leftrightarrow |-(\frac{\beta}{2} + 2) \pm i| = 1 \Leftrightarrow (\frac{\beta}{2} + 2)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\beta}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow \beta = -4$$

$$H(4): \gamma + 2(-4) + 3 = 0 \Leftrightarrow \gamma = 5$$

B3.

$$v^3 + a_2 v^2 + a_1 v + a_0 = 0 \Leftrightarrow v^3 = -a_2 v^2 - a_1 v - a_0 \Leftrightarrow |v|^3 = |-a_2 v^2 - a_1 v - a_0| \Leftrightarrow$$

$$|v|^3 = |a_2 v^2 + a_1 v + a_0| \leq |a_2| |v|^2 + |a_1| |v| + |a_0| \stackrel{B_1}{\leq} 3|v|^2 + 3|v| + 3 \quad (5)$$

Εστω

$$|v| \geq 4 \Leftrightarrow |v|^3 \geq 4|v|^2 \Leftrightarrow |v|^3 \geq 3|v|^2 + |v|^2 \stackrel{|v| \geq 4}{\Leftrightarrow} |v|^3 \geq 3|v|^2 + 4|v| \Leftrightarrow$$

$$|v|^3 \geq 3|v|^2 + 3|v| + |v| \stackrel{|v| \geq 4}{\Leftrightarrow} |v|^3 \geq 3|v|^2 + 3|v| + 4 \Leftrightarrow |v|^3 \geq 3|v|^2 + 3|v| + 3$$

Ατοπο λογω της (5)

Ετσι

$$|v| < 4$$

3ο ΘΕΜΑ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- $f(0) = 1$ και

- $g(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 9

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης

$$f(g(x)) = 1$$

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \frac{\pi}{4})$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_{x_0 - \frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt = f(x_0 - \frac{\pi}{4}) \cdot \exp x_0$$

Μονάδες 8

3ο ΛΥΣΗ

Γ1

Είναι

$$(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x \Rightarrow (f(x) + x)(f(x) + x)' = x$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) + x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$h(x) = f(x) + x \Rightarrow h(x)h'(x) = x \Rightarrow$$

$$\left(\frac{h^2(x)}{2}\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' \xrightarrow[\text{αθροίσμα συνεχών}]{h \text{ συνεχής}} \frac{h^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow h^2(x) = x^2 + 2c \quad (1)$$

$$\text{Για } x=0 \text{ η (1): } h^2(0) = 0^2 + 2c \Rightarrow (f(0)+0)^2 = 2c \xrightarrow{f(0)=1} 1^2 = 2c \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$\text{Η (1) γίνεται: } h^2(x) = x^2 + 1 \Rightarrow h(x) = \pm \sqrt{x^2 + 1} \quad (2)$$

Ομως

 $h(x) \neq 0$, γιατί αν υπάρχει x_0 τέτοιωστε $h(x_0) = 0$, τότε

$$\begin{cases} (f(x_0) + x_0)(f'(x_0) + 1) = x_0 \\ h(x_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h(x_0)(f'(x_0) + 1) = x_0 \\ f(x_0) + x_0 = 0 \end{cases} \xrightarrow{h(x_0)=0} \begin{cases} 0 = x_0 \\ f(0) + 0 = 0 \end{cases} \xrightarrow{f(0)=1} \begin{cases} 0 = 0 \\ 1 = 0 \end{cases}$$

Αποπο, οπότε η h δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{R}$ (και συνεχής), δηλαδή διατηρεί
προσημο στο $\mathbb{R}$.

$$\text{Ομως για } x=0 \Rightarrow h(0) = f(0) + 0 \Rightarrow h(0) = 1 > 0$$

Αρα η $h(x) > 0$ και η (2) δίνει:

$$h(x) = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow f(x) + x = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow \boxed{f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x}$$

Γ2.

Είναι

$$f(g(x)) = 1 \xrightarrow{f(0)=1} f(g(x)) = f(0)$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (πραξίς παραγωγισίμων) με

$$f'(x) = (\sqrt{x^2 + 1} - x)' = \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{2\sqrt{x^2 + 1}} \quad x \leq |x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2 + 1} < 0$$

Ετσι η f είναι γν. φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, αρα και «1 - 1» στο $\mathbb{R}$, οπότε

$$f(g(x)) = f(0) \xrightarrow{f \text{ 1-1}} g(x) = 0 \Rightarrow x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1 = 0 \Rightarrow 2x^3 + 3x^2 - 2 = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = 6x^2 + 6x$.

$$\bullet \varphi(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1$$

Πίνακας προσημου της φ' και μονοτονίας φ

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+	-	+	
$\varphi(x)$				

• Η φ γν.αυξουσα στα $(-\infty, -1]$ και $[0, +\infty)$ • Η φ γν.φθίνουσα στο $[-1, 0]$

$$\begin{cases} \varphi \text{ γν.αυξουσα στο } A_1 = (-\infty, -1] \\ \varphi \text{ γν.φθίνουσα στο } A_2 = [-1, 0] \\ \varphi \text{ γν.αυξουσα στο } A_3 = [0, +\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(A_1) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x), \varphi(-1)] = (-\infty, -7] \\ \varphi(A_2) = [\varphi(-1), \varphi(0)] = [-7, -2] \\ \varphi(A_3) = [\varphi(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)) = [-2, +\infty) \end{cases}$$

Διακρινουμε περιπτωσεις

- Στο $(-\infty, -1]$ η εξίσωση δεν έχει ρίζα.
- Στο $[-1, 0]$ η εξίσωση δεν έχει ρίζα.
- Στο $[0, +\infty)$ η εξίσωση έχει ακριβώς μια ρίζα, αφού το 0 ανήκει στο $\varphi(A_3) = [-2, +\infty)$, οπότε υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = 0$ που είναι μοναδικό αφού η φ είναι γν.αυξουσα στο A_3 . Τελικά η εξίσωση $f(g(x)) = 1$ έχει μοναδική ρίζα που ανήκει στο $(0, +\infty)$.

Γ3:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $H(x) = \int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt - f(x - \frac{\pi}{4}) \cdot \varepsilon \varphi x$

- Η $H(x)$ συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{4}]$ αφού

f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η $\int_0^x f(t) dt$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Οπότε η $\int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt$

είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (συνθεση παραγωγίσιμων $\int_0^x f(t) dt$, $x - \frac{\pi}{4}$) άρα

και συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε και συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{4}] \subseteq \mathbb{R}$

$$\bullet H(0) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt - f(-\frac{\pi}{4}) \cdot \varepsilon \varphi 0 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt \underset{\substack{\varepsilon \varphi 0 = 0 \\ f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ -\frac{\pi}{4} < 0}}{>} 0$$

$$\bullet H(\frac{\pi}{4}) = \int_0^0 f(t) dt - f(0) \cdot \varepsilon \varphi \frac{\pi}{4} \underset{\substack{\int_0^0 f(t) dt = 0 \\ \varepsilon \varphi \frac{\pi}{4} = 1, f(0) = 1}}{=} -1 < 0$$

Οπότε από θεώρημα Bolzano

υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \frac{\pi}{4})$ τέτοιο, ώστε:

$$H(x) = 0 \Rightarrow \int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt - f(x_0 - \frac{\pi}{4}) \cdot \varepsilon \varphi x_0 = 0 \Rightarrow \int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt = f(x_0 - \frac{\pi}{4}) \cdot \varepsilon \varphi x_0$$

4ο ΘΕΜΑ

Εστω $f:(0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

• Η f' είναι γνησίως αυξουσα στο $(0, +\infty)$

• $f(1) = 1$

• $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = \int_a^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt$, $x \in (1, +\infty)$ και $a > 1$

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $f'(1) = 0$ (μονάδες 4), καθώς επίσης ότι
η f παρουσιάζει ελαχιστο στο $x_0 = 1$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Δ2. η g είναι γνησίως αυξουσα (μονάδες 3), και στη συνέχεια, να λύσετε την ανίσωση
στο $\mathbb{R}$ $\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u) du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u) du$ (μονάδες 6)

Μονάδες 9

Δ3. η g είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση

$$(a-1) \int_a^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt = (f(a)-1)(x-a), \quad x > 1$$

εχει ακριβώς μια λύση.

Μονάδες 10

4ο ΛΥΣΗ

Δ1

Είναι

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \stackrel{f(1)=1}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0 &\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - 1}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - 1}{h} = 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - 1}{h} &\stackrel{5h=u}{=} \lim_{h \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0} \frac{f(1+u) - 1}{u} = 5 \cdot f'(1) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - 1}{h} &\stackrel{-h=u}{=} \lim_{h \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0} \frac{f(1+u) - 1}{-u} = -f'(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} 5f'(1) + f'(1) &= 0 \Rightarrow \\ 6f'(1) &= 0 \Rightarrow \\ f'(1) &= 0 \end{aligned}$$

• Αν $0 < x < 1$: $f'(x) < f'(1) \stackrel{f'(1)=0}{\Leftrightarrow} f'(x) < 0$, οπότε η f γν.φθίνουσα στο $(0,1]$

• Αν $x > 1$: $f'(x) > f'(1) \stackrel{f'(1)=0}{\Leftrightarrow} f'(x) > 0$, οπότε η f γν.αυξουσα στο $[1, +\infty)$

Δηλαδή η f παρουσιάζει ελαχιστο για $x_0 = 1$.

Δ2

Η $\frac{f(t)-1}{t-1}$ είναι συνεχής στο $(1, +\infty)$, οπότε η g παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$, με

$$g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1} > 0, \text{ αφού}$$

f γν.αυξουσα στο $[1, +\infty)$ οπότε $f(x) \geq f(1) = 1$ (το « $=$ » ισχύει για $x = 1$)

Ετσι

Για $x > 1$ είναι $g'(x) > 0$, δηλαδή η g είναι γν.αυξουσα στο $(1, +\infty)$.

Εστω η συνάρτηση $h(x) = \int_x^{x+1} g(u) du$, $x > 1$

$$h'(x) = g(x+1) - g(x) \stackrel{g \uparrow}{\underset{x+1 > x}{>}} 0 \Rightarrow h \text{ γν.αυξουσα}$$

Ετσι

$$\left. \begin{aligned} \int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u) du &= h(8x^2+5), 8x^2+5 > 1 \\ \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u) du &= h(2x^4+5), 2x^4+5 > 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u) du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u) du \Rightarrow$$

$$h(8x^2+5) > h(2x^4+5) \stackrel{h \uparrow}{\Rightarrow} 8x^2+5 > 2x^4+5 \Rightarrow 8x^2 - 2x^4 > 0 \Rightarrow x^2(4-x^2) > 0 \stackrel{x^2 > 0}{\Rightarrow} 4-x^2 > 0 \Rightarrow -2 < x < 2$$

Δ3

• $g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1}$ παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$, με $g''(x) = \frac{f'(x)(x-1) - (f(x)-1)}{(x-1)^2}$ (1)

• Θ.Μ.Τ. στο $[1, x]$ για την f : υπάρχει $\xi \in (1, x)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \stackrel{f(1)=1}{\Rightarrow} (x-1)f'(\xi) = f(x)-1$$

Οπότε η (1):

$$g''(x) = \frac{f'(x)(x-1) - (x-1)f'(\xi)}{(x-1)^2} = \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x-1} \begin{matrix} \xrightarrow{x \uparrow} \\ \xrightarrow{x < \xi} \\ \xrightarrow{x > 1} \end{matrix} \begin{matrix} f'(\xi) < f'(x) \\ f'(\xi) > f'(x) \end{matrix} 0 \Rightarrow g \text{ κυρτή στο } (1, +\infty)$$

Είναι

$$\bullet (a-1) \int_a^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt = (f(a)-1)(x-a) \Rightarrow (a-1)g(x) = (f(a)-1)(x-a) \quad (2)$$

$$\bullet g'(a) = \frac{f(a)-1}{a-1} \Rightarrow f(a)-1 = (a-1)g'(a) \quad (3)$$

Η δοσμένη εξίσωση λόγω των (2), (3) γίνεται ισοδυναμία :

$$(a-1)g(x) = (a-1)g'(a)(x-a) \Rightarrow g(x) = g'(a)(x-a)$$

• Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στη θέση $x = a$ έχει εξίσωση :

$$(\varepsilon) : y - g(a) = g'(a)(x-a) \xrightarrow{g(a)=0} (\varepsilon) : y - g(a) = g'(a)(x-a)$$

• Η C_g βρίσκεται πάνω από την (ε) (g κυρτή), εκτός του σημείου επαφής.

Έτσι

$$g(x) \geq y \Rightarrow g(x) \geq g'(a)(x-a) \text{ με την ισότητα να ισχύει για } x = a.$$

Δηλαδή η εξίσωση $g(x) = g'(a)(x-a)$ έχει μοναδική λύση την $x = a$.