Απολυτήριες εξετάσεις Γ΄ Τάξης

Ημερήσιου Γενικού Λυκείου

ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ.
22 – 5 – 2013

ΘΕΜΑ Α: **Α1.** γ **Α2.** γ **Α3.** δ

Α4. γ **Α5.** **α)** Σ
β) Λ
γ) Σ
δ) Λ
ε) Σ

ΘΕΜΑ Β: **Β1.** Σωστό το **ii.**

Αιτιολόγηση: Η συνολική ενέργεια της ηλεκτρικής ταλάντωσης τη στιγμή t_0 είναι:

$$E_0 = \frac{Q^2}{2C} \overset{Q=CV}{=} \frac{CV^2}{2} \Rightarrow E_0 = \frac{20 \cdot 10^{-6} \cdot 20^2}{2} = 4 \cdot 10^{-3}\,J$$

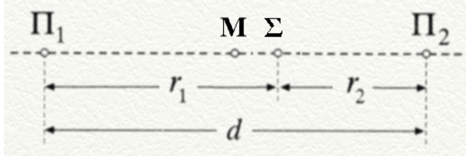
Τη στιγμή t_1 εφόσον το φορτίο του πυκνωτή είναι μηδέν, η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο είναι η μέγιστη δυνατή. Επομένως τη στιγμή t_1 η ενέργεια της ηλεκτρικής ταλάντωσης είναι:

$$E_1 = \frac{LI^2}{2} \Rightarrow E_1 = \frac{10^{-3} \cdot 6^2}{9 \cdot 2} = 2 \cdot 10^{-3}\,J$$

Συνεπώς από τη στιγμή t_0 έως τη στιγμή t_1 η απώλεια ενέργειας είναι:

$$\Delta E = E_0 - E_1 = 2 \cdot 10^{-3}\,J$$

Β2. Σωστό το **iii.**



Αιτιολόγηση: **Α΄ τρόπος:** Έστω ένα τυχαίο σημείο Σ επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ στο οποίο έχουμε απόσβεση και το οποίο απέχει από τις πηγές $Π_1$ και $Π_2$

αποστάσεις r_1 και $r_2 < r_1$ αντίστοιχα. Για το σημείο αυτό εφόσον βρίσκεται επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ και έχουμε απόσβεση θα ισχύουν:

$$r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda_2}{2}, \quad N \in Z \quad (1)$$
$$r_1 + r_2 = d \quad (2)$$
$$0 < r_1 < d \quad (3)$$

όπου λ_2 το μήκος κύματος των κυμάτων που εκπέμπουν οι πηγές όταν έχουμε συχνότητα f_2. Από τις σχέσεις (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$$r_1 = (2N+1)\frac{\lambda_2}{4} + \frac{d}{2}$$

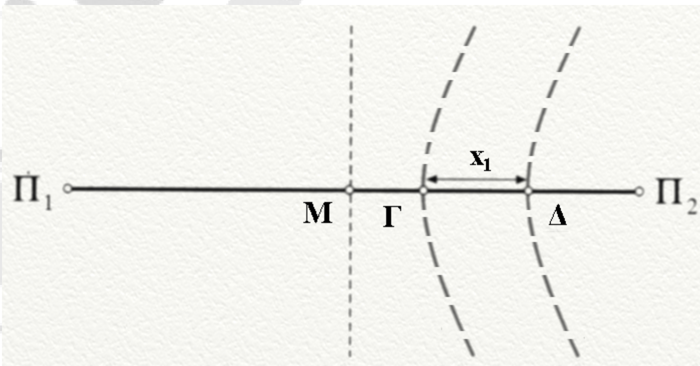
Αντικαθιστώντας τη τελευταία σχέση στην (3) βρίσκουμε: μετά από λίγες πράξεις:

$$\frac{-2d}{2\lambda_2} - \frac{1}{2} < N < \frac{2d}{2\lambda_2} - \frac{1}{2}$$

Εφόσον $f_2 = 3f_1$ θα είναι $\lambda_2 = \lambda_1/3$ (όπως προκύπτει από τη θεμελιώδη εξίσωση των κυμάτων $\upsilon = \lambda f$). Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση το λ_2 και αφού $d = 2\lambda_1$, βρίσκουμε τελικά για το N:

$$-6.5 < N < 5.5 \Rightarrow N = \underbrace{-6,-5,-4,...3,4,5}_{12\text{σημεία}}$$

Β΄ τρόπος: Έστω δύο διαδοχικές υπερβολές απόσβεσης οι οποίες τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ στα σημεία Γ και Δ και έστω x_1 η απόσταση μεταξύ Γ και Δ.



Επειδή τα Γ, Δ είναι διαδοχικά σημεία απόσβεσης θα ισχύουν:

$$\Gamma\Pi_1 - \Gamma\Pi_2 = (2N+1)\frac{\lambda_1}{2}, \quad N \in Z \quad (1)$$

$$\Delta\Pi_1 - \Delta\Pi_2 = (2(N+1)+1)\frac{\lambda_1}{2}, \quad N \in Z \quad (2)$$

όπου λ_1 το αρχικό μήκος κύματος των κυμάτων που εκπέμπουν οι δύο πηγές. Αφαιρώντας την σχέση (1) από τη σχέση (2) βρίσκουμε:

$$\underbrace{(\Delta\Pi_1 - \Gamma\Pi_1)}_{x_1} + \underbrace{(\Gamma\Pi_2 - \Delta\Pi_2)}_{x_1} = (2(N+1)+1)\frac{\lambda_1}{2} - (2N+1)\frac{\lambda_1}{2}$$

$$\Rightarrow 2x_1 = \lambda_1 \Rightarrow x_1 = \frac{\lambda_1}{2}$$

Αρχικά το μήκος κύματος των κυμάτων που εκπέμπουν οι πηγές είναι λ_1. Όταν αλλάξει η συχνότητα και γίνει $f_2 = 3f_1$ από την θεμελιώδη εξίσωση των κυμάτων ($\upsilon = \lambda f$) προκύπτει ότι το μήκος κύματος γίνεται $\lambda_2 = \lambda_1/3$. Επομένως η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων απόσβεσης γίνεται $x_2 = x_1/3$. Αν ονομάσουμε ν το πλήθος των υπερβολών απόσβεσης που δημιουργούνται συνολικά μεταξύ των δύο πηγών, τότε εφόσον η απόσταση των δύο πηγών δεν έχει μεταβληθεί θα ισχύουν:

$$\left.\begin{aligned} d &= 4x_1 \\ d &= \nu \cdot x_2 \end{aligned}\right\} \overset{x_2 = x_1/3}{\Rightarrow} \nu \cdot \frac{x_1}{3} = 4x_1 \Rightarrow \nu = 12$$

Β3. Σωστό το **ii.**

Αιτιολόγηση: Κατά την τοποθέτηση του δίσκου Δ_2 επάνω στο δίσκο Δ_1 η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών στο σύστημα των δύο δίσκων είναι μηδέν. Επομένως η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της στροφορμής έχουμε για την τελική γωνιακή ταχύτητα του συστήματος:

$$\vec{L}_{\text{ολική(αρχική)}} = \vec{L}_{\text{ολική(τελική)}} \Rightarrow I_1\omega_1 = (I_1 + I_2)\omega \Rightarrow$$

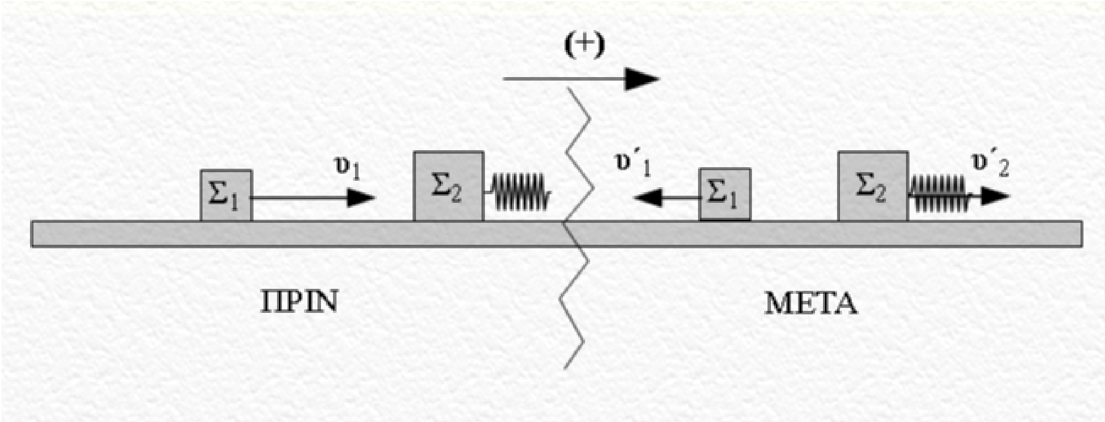
$$I_1\omega_1 = (I_1 + \frac{I_1}{4})\omega \Rightarrow \omega = \frac{4\cancel{I_1}}{5\cancel{I_1}}\omega_1$$

Επομένως η μεταβολή της στροφορμής του δίσκου Δ_1 θα είναι:

$$\Delta\vec{L}_1 = \vec{L}_{1(\text{τελική})} - \vec{L}_{1(\text{αρχική})} \Rightarrow \Delta\vec{L}_1 = I_1\vec{\omega} - I_1\vec{\omega}_1$$

$$\Rightarrow \Delta\vec{L}_1 = \frac{4}{5}I_1\vec{\omega}_1 - I_1\vec{\omega}_1 \Rightarrow \Delta\vec{L}_1 = -\frac{1}{5}I_1\vec{\omega}_1 = -\frac{1}{5}\vec{L}_1 \Rightarrow \left|\Delta\vec{L}_1\right| = \frac{1}{5}\left|\vec{L}_1\right|$$

ΘΕΜΑ Γ: **Γ1.** Επειδή η κρούση των δύο σωμάτων είναι ελαστική, για τις ταχύτητες του $Σ_1$ και του $Σ_2$ μετά τη κρούση, με θετική τη φορά που φαίνεται στο σχήμα, θα ισχύουν:



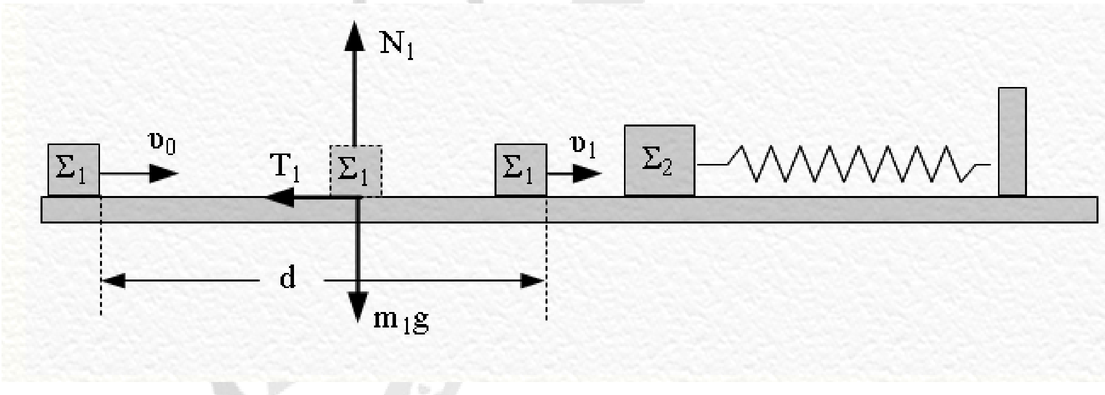
$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \quad (1)$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \quad (2)$$

Από τη σχέση (1) και εφόσον η φορά της ταχύτητας του $Σ_1$ μετά τη κρούση αντιστρέφεται θα έχουμε:

$$(1) \Rightarrow -\sqrt{10}\mathrm{m/s} = \frac{m_1 - 2m_1}{m_1 + 2m_1}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1 = 3\sqrt{10}\mathrm{m/s}$$

Το $Σ_1$ κατά τη κίνησή του από την αρχική του θέση μέχρι λίγο πριν συγκρουσθεί με το $Σ_2$, δέχεται τις δυνάμεις που φαίνονται στο σχήμα.



Η μόνη δύναμη που επιδρά στη διεύθυνση της κίνησής του είναι η σταθερή δύναμη της τριβής $\vec{T}_1$ η οποία του προκαλεί μία σταθερή επιβράδυνση. Εφαρμόζοντας Θ.Μ.Κ.Ε. για τη κίνηση του $Σ_1$ από την αρχική του θέση μέχρι λίγο πριν συγκρουσθεί με το $Σ_2$ έχουμε:

$$K_1 - K_0 = \Sigma W \Rightarrow \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} - \frac{m_1\upsilon_0^2}{2} = -T_1 \cdot d \quad (3)$$

όπου για τη δύναμη της τριβής εφόσον το $Σ_1$ στον κατακόρυφο άξονα ισορροπεί θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{r}\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow m_1 g = N_1 \\ T_1 = \mu N_1\end{array}\right\} \Rightarrow T_1 = \mu m_1 g$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην (3) παίρνουμε για το μέτρο της αρχικής ταχύτητας του $Σ_1$:

$$\frac{\cancel{m_1}\upsilon_1^2}{2} - \frac{\cancel{m_1}\upsilon_0^2}{2} = -\mu \cancel{m_1} g_1 d \Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{\upsilon_1^2 + 2mgd} \Rightarrow \upsilon_0 = 10m/s$$

Γ2. Από τη σχέση (2) βρίσκουμε την ταχύτητα του $Σ_2$ αμέσως μετά τη κρούση:

$$(2) \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + 2m_1}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2' = 2\sqrt{10}m/s$$

Το ζητούμενο ποσοστό θα είναι:

$$\% = \frac{\Delta K_2}{K_1}\cdot 100 = \frac{K_2' - \cancelto{0}{K_2}}{K_1}\cdot 100 \Rightarrow \% = \frac{\frac{m_2\upsilon_2'^2}{2}}{\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}}\cdot 100$$

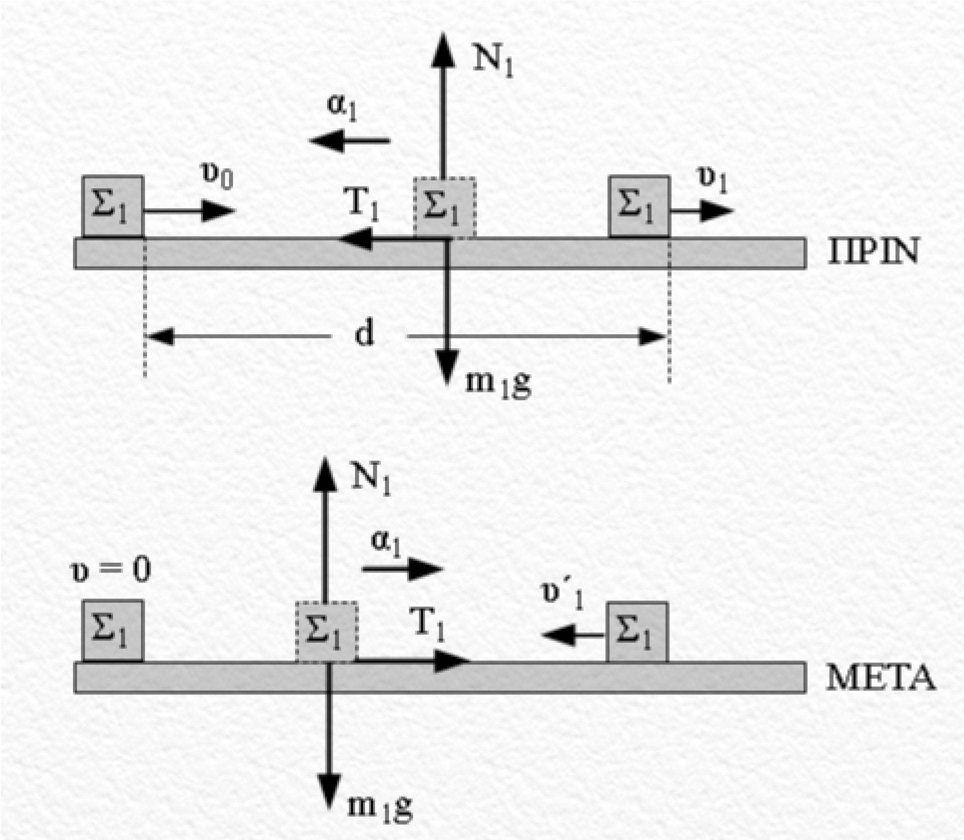
$$\Rightarrow \% = \frac{8}{9}\cdot 100 = 88.9\%$$

Γ3. Το $Σ_1$ τόσο πριν όσο και μετά τη κρούση εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση υπό την επίδραση των δυνάμεων που φαίνονται στο σχήμα. Εφαρμόζοντας τους νόμους του Νεύτωνα υπολογίζουμε το μέτρο $α_1$ της επιβράδυνσης του σώματος τόσο πριν όσο και μετά από την κρούση:

$$\left.\begin{array}{r}\Sigma F_x = m_1\alpha_1 \\ \Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow m_1 g = N_1 \\ T_1 = \mu N_1\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1 = \mu g = 5m/s^2$$

Από την στιγμή t_0 μέχρι τη στιγμή που το $Σ_1$ φτάνει στο $Σ_2$ έχει περάσει χρόνος $Δt_1$ που μπορεί να υπολογισθεί από τη χρονική εξίσωση της ταχύτητας του $Σ_1$:

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 - \alpha_1\Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{\upsilon_0 - \upsilon_1}{\alpha_1} \overset{\sqrt{10}=3.2}{\Rightarrow} \Delta t_1 = 0.08s$$



Ομοίως από την στιγμή αμέσως μετά τη κρούση και μέχρι να σταματήσει να κινείται το Σ_1 ($\upsilon = 0$) έχει περάσει χρόνος Δt_2 που μπορεί να υπολογισθεί από τη σχέση:

$$0 = \upsilon_1' - \alpha_1 \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{\upsilon_1'}{\alpha_1} \overset{\sqrt{10}=3.2}{\Rightarrow} \Delta t_1 = 0.64\text{s}$$

Άρα συνολικά από την στιγμή t_0 και μέχρι να σταματήσει να κινείται το Σ_1 (θεωρώντας αμελητέα τη χρονική διάρκεια της κρούσης) πέρασε χρόνος:

$$\Delta t_{o\lambda} = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 0.72\text{s}$$

Γ4. Το Σ_2 μετά τη κρούση εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση κίνηση υπό την επίδραση της τριβής και της δύναμης που δέχεται από το ελατήριο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αμέσως μετά τη κρούση το Σ_2 έχει κινητική ενέργεια:

$$K_2' = \frac{m_2 \upsilon_2'^2}{2} \Rightarrow K_2' = 20\text{J}$$

Η ενέργεια αυτή μετατρέπεται σε θερμότητα λόγω του έργου της τριβής και σε δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης λόγω της παραμόρφωσης του ελατηρίου. Το ελατήριο θα αποκτήσει τη μέγιστη συσπείρωση (Δl_{max}) τη στιγμή που το σώμα θα σταματήσει **για 1^η φορά** να κινείται στιγμιαία (καθώς υπάρχει απώλεια μηχανικής ενέργειας λόγω του έργου της τριβής). Εκείνη τη στιγμή το σώμα θα έχει διατρέξει απόσταση $x = \Delta l_{max}$ και η μηχανική ενέργεια που έχει μετατραπεί σε θερμότητα θα ισούται με το έργο της τριβής. Εφαρμόζοντας συνεπώς την Α.Δ.Ε. από τη στιγμή αμέσως μετά τη κρούση μέχρι τη στιγμή που το Σ_2 σταματά για 1^η φορά να κινείται θα έχουμε:

$$\begin{aligned} K'_{2(\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta})} &= \left|W_{T_2}\right| + U_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow \\ 20\text{J} &= T_2\Delta l_{max} + \frac{k\Delta l_{max}^2}{2} \end{aligned} \qquad (4)$$

όπου $U_{\varepsilon\lambda}$ η δυναμική ενέργεια που έχει αποθηκευτεί στο ελατήριο στη θέση μέγιστης παραμόρφωσης και $\left|W_{T_2}\right|$ η ενέργεια που μετατράπηκε σε θερμότητα λόγω του έργου της τριβής. Για τη δύναμη της τριβής που δέχεται το Σ_2 κατά τη κίνησή του έχουμε:

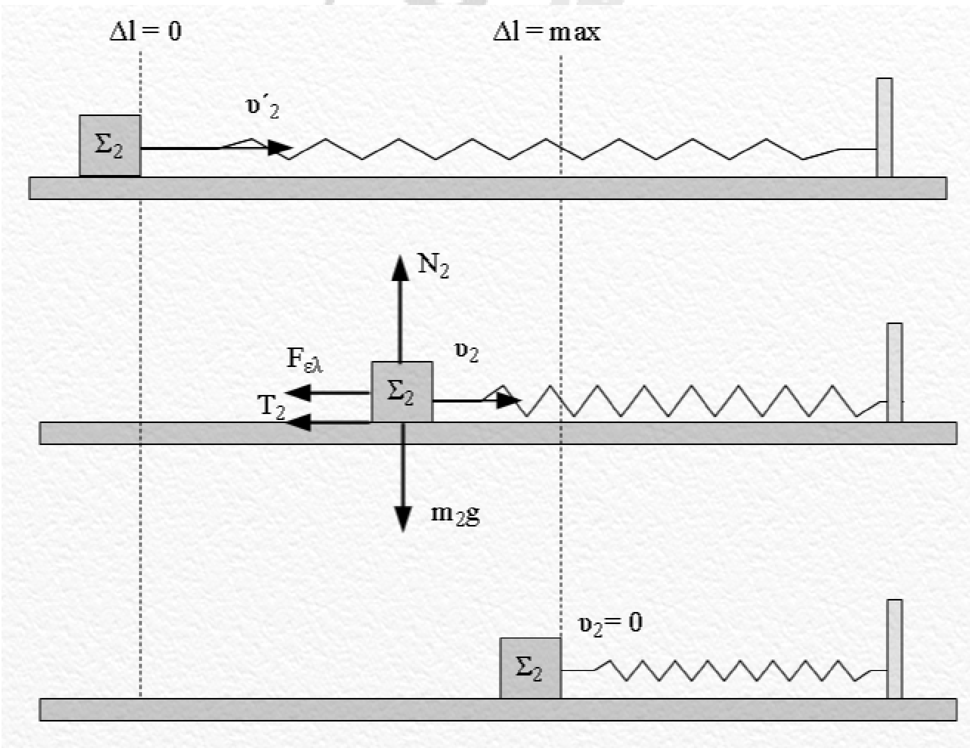
$$\left.\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow m_2 g = N_2 \\ T_2 = \mu N_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_2 = \mu m_2 g$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (4) και λύνοντας την εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που προκύπτει ως προς Δl_{max} βρίσκουμε:

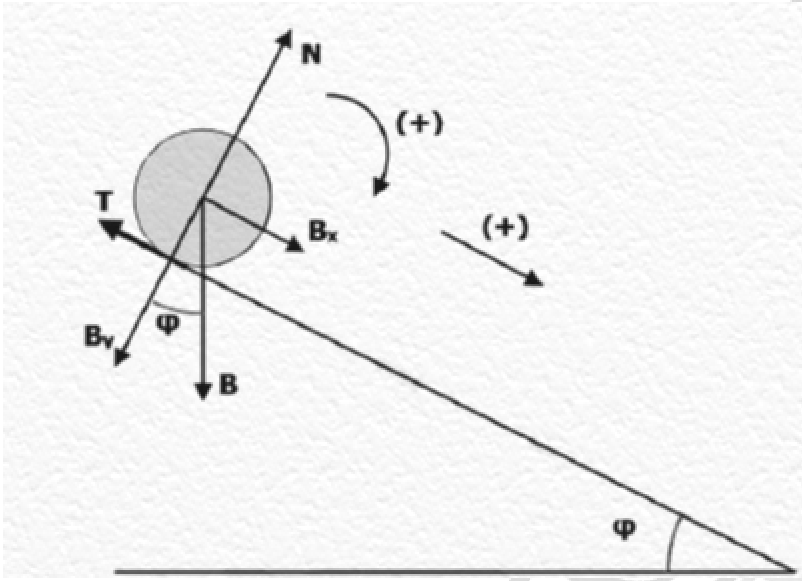
$$\Delta l_{max} = -\frac{14}{21}\text{m (απορριπτεται)}$$

ή

$$\Delta l_{max} = \frac{4}{7}\text{m}$$



ΘΕΜΑ Δ: **Δ1.** Κατά τη κύλισή του στο επίπεδο ο κύλινδρος δέχεται τις δυνάμεις που φαίνονται στο σχήμα. Σημειώνουμε ότι δέχεται από το επίπεδο τριβή με φορά προς τα πάνω λόγω της κύλισής του.



Εφαρμόζοντας τον 2^o νόμο του Νεύτωνα για την μεταφορική και για τη στροφική κίνηση του κυλίνδρου με θετικές τις φορές που φαίνονται στο σχήμα παίρνουμε:

$$\Sigma F_x = M\alpha_{cm} \Rightarrow Mg\eta\mu\varphi - T = M\alpha_{cm} \quad (1)$$

και

$$\Sigma\tau_{(\kappa)} = I_{(\kappa)}\alpha_\gamma \Rightarrow TR = \frac{MR^2}{2}\alpha_\gamma \quad (2)$$

Επειδή ο κύλινδρος κυλά θα ισχύει:

$$\alpha_{cm} = R\alpha_\gamma \quad (3)$$

Επιλύοντας το σύστημα των (1) , (2) και (3) βρίσκουμε τελικά:

$$\alpha_{cm} = \frac{2g\eta\mu\varphi}{3}$$

Δ2. Η ροπή αδράνειας Ι΄ του νέου κυλίνδρου θα ισούται με την ροπή αδράνειας του αρχικού (Ι) μείον τη ροπή αδράνειας του κυλινδρικού τμήματος που αφαιρέσαμε (I_α). Θα έχουμε συνεπώς:

$$I' = I - I_\alpha \Rightarrow I' = \frac{MR^2}{2} - \frac{mr^2}{2} \quad (4)$$

όπου m η μάζα του κυλινδρικού τμήματος που αφαιρέσαμε. Για τον υπολογισμό αυτής της μάζας σκεφτόμαστε ότι το στερεό είναι ομογενές και έχει σταθερή πυκνότητα ρ, επομένως η μάζα οποιουδήποτε τμήματός του θα είναι ανάλογη του όγκου του τμήματος. Δεδομένου ότι ο όγκος ενός κυλίνδρου ύψους h και ακτίνας R είναι $V = \pi R^2 h$, θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \frac{M}{V} \\ \rho &= \frac{m}{V_\alpha} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{M}{V} = \frac{m}{V_\alpha} \Rightarrow \frac{M}{\pi R^2 h} = \frac{m}{\pi r^2 h} \Rightarrow m = \frac{Mr^2}{R^2}$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στην σχέση (4) παίρνουμε:

$$I_\alpha = \frac{1}{2}MR^2\left(1 - \frac{r^4}{R^4}\right)$$

Δ3. Το κυλινδρικό τμήμα που τοποθετήσαμε στο κενό δεν περιστρέφεται διότι δεν δέχεται καμία δύναμη που να έχει ροπή. Άρα το τμήμα αυτό εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση. Το υπόλοιπο τμήμα εκτελεί μεταφορική και στροφική κίνηση υπό την επίδραση των δυνάμεων που φαίνονται στο πιο πάνω σχήμα. Εφαρμόζοντας το 2^o νόμο του Νεύτωνα για τον κύλινδρο θα έχουμε συνεπώς:

$$\Sigma F_x = M\alpha'_{cm} \Rightarrow Mg\eta\mu\varphi - T = M\alpha'_{cm} \quad (5)$$

και

$$\Sigma\tau = I'\alpha'_\gamma \Rightarrow T\cancel{R} = \frac{MR^{\cancel{2}}}{2}\left(1 - \frac{r^4}{R^4}\right)\alpha'_\gamma \quad (6)$$

Επιλύοντας το σύστημα των (5) και (6) βρίσκουμε τελικά:

$$\alpha_{cm} = \frac{2g\eta\mu\varphi}{3 - \frac{r^4}{R^4}}$$

Δ4. Ο ζητούμενος λόγος είναι:

$$\frac{K_{\mu\varepsilon\tau}}{K_{\sigma\tau\rho}} = \frac{\frac{M\upsilon_{cm}^2}{2}}{\frac{I'\omega^2}{2}} \Rightarrow \frac{K_{\mu\varepsilon\tau}}{K_{\sigma\tau\rho}} = \frac{M\upsilon_{cm}^2}{\frac{1}{2}MR^2\left(1 - \frac{r^4}{R^4}\right)\omega^2}$$

$$\overset{r=R/2}{\Rightarrow} \frac{K_{\mu\varepsilon\tau}}{K_{\sigma\tau\rho}} = \frac{32}{15}\frac{\cancel{\upsilon_{cm}^2}}{\cancel{R^2\omega^2}} = \frac{32}{15}$$

Επιμέλεια Απαντήσεων:
Βάρης Βασίλης
Παναγιώτης Λεππίπας

<u>Σχόλια:</u> Τα θέματα ήταν σαφή και χωρίς λάθη. Η κλιμάκωση της δυσκολίας στα τρία πρώτα θέματα κρίνεται ικανοποιητική. Ο βαθμός δυσκολίας όμως και η γενικότερη λογική του 4^{ου} θέματος είναι σαφώς εκτός του πλαισίου της βαθμίδος μέσης εκπαίδευσης και μπορεί να αντιμετωπιστεί με επιτυχία μόνο από μαθητές οι οποίοι όχι απλώς είναι άριστοι άλλα έχουν και ιδιαίτερο ταλέντο στη μελέτη και κατανόηση φυσικών φαινομένων. Αναμένονται ελάχιστα άριστα γραπτά.