Λύσεις Θεμάτων Μαθηματικών

Γ΄ Τάξης ΕΠΑ.Λ. – Εξετάσεις 2019.

ΘΕΜΑ Α

A1 Απόδειξη σελ. 28 σχολ. βιβλίο

A2 Σελ. 59 σχολ. βιβλίο

A3
α → Λ
β → Σ
γ) → Λ
δ) → Λ
ε) → Σ

ΘΕΜΑ Β.

$$11,\ 7,\ \kappa,\ 13,\ 11,\ 10$$

$CV = 20\% \rightarrow CV = 0{,}2$ $\quad s^2 = 4 \quad s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$

B1 $CV = \dfrac{s}{\bar{x}} \Rightarrow \bar{x} = \dfrac{s}{CV} = \dfrac{2}{0{,}2} = \dfrac{20}{2} \Rightarrow \bar{x} = 10$

B2 $\bar{x} = \dfrac{11+7+\kappa+13+11+10}{6} = 10 \Rightarrow \dfrac{52+\kappa}{6} = 10 \Rightarrow 52+\kappa = 60 \Rightarrow$

$\Rightarrow \kappa = 60-52 \Rightarrow \kappa = 8$

B3 οι τιμές σε αύξουσα σειρά: $7,\ 8,\ 10,\ 11,\ 11,\ 13$

$\nu = 6$ (άρτιος) Μεσαίες: 3η → 10 4η → 11

$\delta = \dfrac{10+11}{2} = \dfrac{21}{2} \Rightarrow \delta = 10{,}5$

$R = t_{max} - t_{min} = 13 - 7 \Rightarrow R = 6$

B4 $x_i' = x_i - 2$ Άρα $\bar{x}' = \bar{x} - 2$

$s' = s$

$CV' = \dfrac{s'}{\bar{x}'} = \dfrac{s}{\bar{x}-2} = \dfrac{2}{10-2} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4} = 0,25$ ή 25%

Το δείγμα είναι ανομοιογενές γιατί $CV > 10\%$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 $f'(x) = \left(\sqrt{x^2-2x+10}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2-2x+10}} \cdot (x^2-2x+10)' = \dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+10}} =$

$= \dfrac{2(x-1)}{2\sqrt{x^2-2x+10}} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}$

Γ2 $f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}} = 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	

Στο $(-\infty, 1]$ η f είναι $\searrow$

Στο $[1, +\infty)$ η f είναι $\nearrow$

Τ.Ε $\rightarrow$ $f(1) = \sqrt{1^2 - 2\cdot 1 + 10} = \sqrt{1-2+10} = \sqrt{-1+10} = \sqrt{9} = 3$

Από ορισμό Τ.Ε. $\rightsquigarrow$ $f(x) \geq$ Τ.Ε $\Rightarrow f(x) \geq f(1) \Rightarrow f(x) \geq 3$

Γ3 $y = \lambda x + \beta$ $\qquad \lambda = f'(5) = \dfrac{5-1}{\sqrt{5^2-2\cdot 5+10}} = \dfrac{4}{\sqrt{25-10+10}} = \dfrac{4}{\sqrt{25}} = \dfrac{4}{5}$

$y = f(5) = \sqrt{5^2-2\cdot 5+10} = \sqrt{25-10+10} = \sqrt{25} \Rightarrow y = 5$

$y = \lambda x + \beta \Rightarrow 5 = \dfrac{4}{5}\cdot 5 + \beta \Rightarrow 5 = 4 + \beta \Rightarrow 5 - 4 = \beta \Rightarrow \beta = 1$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η:

$$y=\frac{4}{5}x+1$$

Γ4 Σημείο Α (Σημείο τομής με τον άξονα $x'x$)

$y=0$

$$y=\frac{4}{5}x+1 \xrightarrow{y=0} 0=\frac{4}{5}x+1 \Rightarrow \frac{4}{5}x=-1 \Rightarrow x=-\frac{5}{4}$$

Σημείο Α $\rightarrow$ $A\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$

Σημείο Β (Σημείο τομής με τον άξονα $y'y$)

$x=0$

$$y=\frac{4}{5}x+1 \xrightarrow{x=0} y=\frac{4}{5}\cdot 0+1 \Rightarrow y=1$$

Σημείο Β $\rightarrow$ $B(0, 1)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 $f(x)=x^3-3x^2+\lambda x \xrightarrow{\lambda=3} f(x)=x^3-3x^2+3x$

$$f'(x)=(x^3)'-(3x^2)'+(3x)'=3x^2-6x+3$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-6x+3=0 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1 \quad (\text{διπλή ρίζα})$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Οι τιμές $x_1 = \frac{3}{8}$ και $x_2 = \frac{5}{6}$ ανήκουν στο $(-\infty, 1]$ στο οποίο η f είναι γν. αύξουσα

$$\frac{3}{8} < \frac{5}{6} \xrightarrow[\nearrow]{\text{η } f} f\left(\frac{3}{8}\right) < f\left(\frac{5}{6}\right)$$

Δ2

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2-6x+3}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{3(x^2-2x+1)\cdot(\sqrt{x}+1)}{\underbrace{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}_{(\sqrt{x})^2-1^2} x(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{3(x-1)^2\cdot(\sqrt{x}+1)}{(x-1)\cdot x\cdot(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{3(\sqrt{x}+1)}{x} =$$

$$= \frac{3(\sqrt{1}+1)}{1} = 3\cdot 2 = 6$$

Δ3 ελάχιστος συντελεστής διεύθυνσης $\rightarrow$ λ ελάχιστος

Μελέτη $f'(x)$ ως προς τα ακρότατα

$f'(x) = 3x^2-6x+3 \qquad (f'(x))' = (3x^2)' - (6x)' + (3)' = 6x-6$

$(f'(x))' = f''(x) = 0 \Rightarrow 6x-6=0 \Rightarrow 6x=6 \Rightarrow x = \frac{6}{6} \Rightarrow x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	

Για $x=1$ $f'(x) \rightarrow$ ελάχιστη

Άρα λ γίνεται ελάχιστος όταν $x=1$.

$y = f(1) = 1^3 - 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 = 1-3+3 \Rightarrow y=1.$

Άρα το σημείο στο οποίο ο συντελεστής διεύθυνσης γίνεται ελάχιστος είναι το $(1,1)$

(Δ4) Η f δεν παρουσιάζει ακρότατα

→ Η $f'(x)$ δεν αλλάζει πρόσημο.

$f'(x) = 3x^2 - 6x + \lambda$

Για να είναι $3x^2 - 6x + \lambda$ χωρίς αλλαγή προσήμου
θα πρέπει $\Delta \leq 0$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \lambda \leq 0 \Rightarrow 36 - 12\lambda \leq 0$

$\Rightarrow 36 \leq 12\lambda \Rightarrow \lambda \geq \frac{36}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda \geq 3$

Άρα θα πρέπει $\lambda \geq 3$ για να μην έχει ακρότατα η $f(x)$.

Δηλαδή η ελάχιστη τιμή του λ είναι $\underline{\lambda = 3}$.