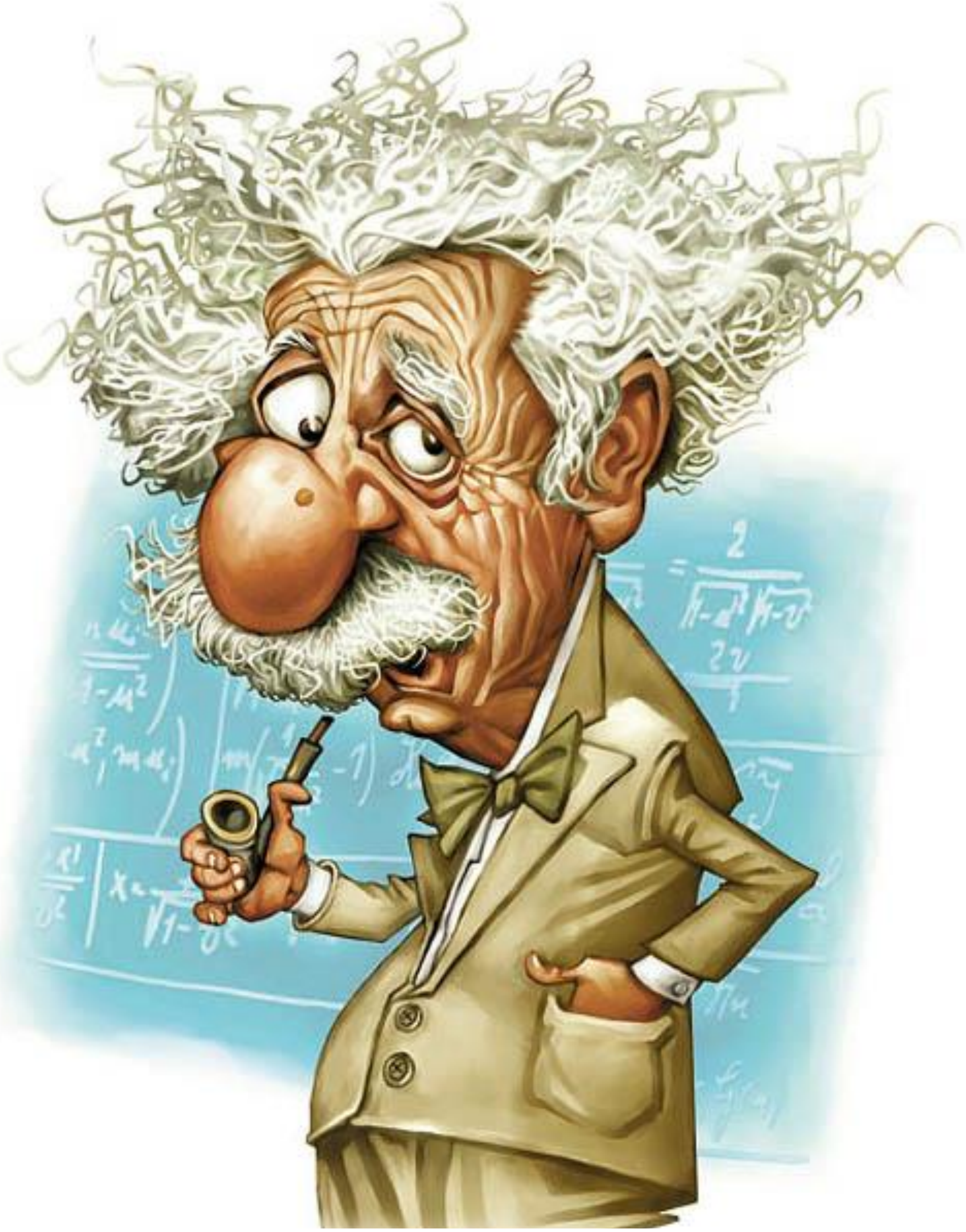


enikos.gr
εδώ μιλάμε στον ενικό

εδώ μιλάμε
στον ενικό!

Π Α Ν Ε Λ Λ Η Ν Ι Ε Σ 2 0 1 5
Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Α Κ Α Ι Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Α Σ Τ Α Τ Ι Σ Τ Ι Κ Η

Ε π ι μ ε λ ε ι α : Τ α κ η ς Τ σ α κ α λ α κ ο ς

1ο ΘΕΜΑ

Α1. *Αν οι συναρτησεις f, g ειναι παραγωγισιμες στο* $\mathbb{R}$, *να αποδειξετε οτι*
$(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x),\ \ x \in \mathbb{R}$

Μοναδες 7

Α2. *Ποτε λεμε οτι μια συναρτηση f ειναι παραγωγισιμη στο σημειο* x_0 *του πεδιου ορισμου της;*

Μοναδες 4

Α3. *Αν* $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ *ειναι οι παρατηρησεις μιας ποσοτικης μεταβλητης Χ ενος δειγματος μεγεθους ν και* $w_1, w_2, \ldots, w_\nu$ *ειναι οι αντιστοιχοι συντελεστες σταθμισης (βαρυτητας), να ορισετε τον σταθμικο μεσο της μεταβλητης Χ.*

Μοναδες 4

Α4. *Να χαρακτηρισετε τις προτασεις που ακολουθουν, γραφοντας στο τετραδιο σας διπλα στο γραμμα που αντιστοιχει σε καθε προταση τη λεξη* ***Σωστο***, *αν η προταση ειναι σωστη, η* ***Λαθος***, *αν η προταση ειναι λανθασμενη.*

α) *Εαν για τη συναρτηση f ισχυει* $f'(x_0) = 0$, *για* $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ *στο* (α, x_0) *και* $f'(x) < 0$ *στο* (x_0, β), *τοτε η f παρουσιαζει ελαχιστο στο διαστημα* (α, β) *για* $x = x_0$.

(μοναδες 2)

β) *Ενα τοπικο ελαχιστο μιας συναρτησης στο πεδιο ορισμου της μπορει να ειναι μεγαλυτερο απο ενα τοπικο μεγιστο*

(μοναδες 2)

γ) *Η διακυμανση των παρατηρησεων μιας ποσοτικης μεταβλητης Χ εκφραζεται με τις ιδιες μοναδες με τις οποιες εκφραζονται οι παρατηρησεις.*

(μοναδες 2)

δ) *Αν για τους συντελεστες μεταβολης των δειγματων Α και Β ισχυει* $CV_B > CV_A$, *τοτε λεμε οτι το δειγμα Β εμφανιζει μεγαλυτερη ομοιογενεια απο το δειγμα Α.*

(μοναδες 2)

ε) *Αν Α, Β ειναι ενδεχομενα ενος δειγματικου χωρου Ω, τοτε η εκφραση «η πραγματοποιηση του Α συνεπαγεται την πραγματοποιηση του Β» δηλωνει οτι* $A \subseteq B$.

(μοναδες 2)

Μοναδες 10

Προσφορα του e n i k o s . g r και του http://mathslibrary4.blogspot.gr

1ο ΛΥΣΗ

A1.

Εστω η συναρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$. Εχουμε

$$F(x+h)-F(x)=(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))$$
$$=(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x)),$$

και για $h\neq 0$, $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$.

Επομενως

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x).$$

Άρα

$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$

A2.

Αν το οριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ υπαρχει και ειναι πραγματικος αριθμος, τοτε λεμε οτι η f ειναι παραγωγισιμη στο σημειο x_0 του πεδιου ορισμου της. Το οριο αυτο ονομαζεται **παραγωγος της f στο x_0**, συμβολιζεται με $f'(x_0)$ και διαβαζεται "f τονουμενο του x_0".

Εχουμε λοιπον: $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

A3.

$$\bar{x}=\frac{x_1w_1+x_2w_2+\ldots+x_\nu w_\nu}{w_1+w_2+\ldots+w_\nu}=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_iw_i}{\sum_{i=1}^{\nu}w_i}$$

A4.

α) Λαθος

β) Σωστο

γ) Λαθος

δ) Λαθος

ε) Σωστο

Προσφορα του enikos.gr και του http://mathslibrary4.blogspot.gr

2ο ΘΕΜΑ

Εστω Α, Β και Γ ενδεχομενα ενός δειγματικου χωρου Ω. Οι πιθανοτητες των ενδεχομενων Α, Α ∩ Β και Α ∪ Β ανηκουν στο συνολο λυσεων της εξίσωσης
$(3x-1)(8x^2-6x+1)=0$
Η πιθανοτητα του ενδεχομενου Γ ανηκει στο συνολο λυσεων της εξισωσης
$9x^2-3x-2=0$

Β1.

Να αποδειξετε οτι $P(\alpha)=\frac{1}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$ *και* $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$

Μοναδες 5

Β2. *Να υπολογισετε την πιθανοτητα* $P(A'-B')$, *καθως επισης και την πιθανοτητα του ενδεχομενου*
Δ: «πραγματοποιειται το πολυ ενα απο τα ενδεχομενα Α και Β».

Μοναδες 8

Β3. *Να υπολογισετε την πιθανοτητα του ενδεχομενου*
Ε: «πραγματοποιειται μονο ενα απο τα ενδεχομενα Α και Β».

Μοναδες 6

Β4. *Να εξετασετε αν τα ενδεχομενα Β και Γ ειναι ασυμβιβαστα.*

Μοναδες 6

Προσφορα του e n i k o s . g r και του http://mathslibrary4.blogspot.gr

$$(3x-1)(8x^2-6x+1)=0 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 3x-1=0 \\ \eta \\ 8x^2-6x+1=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x=\frac{1}{3} \ \eta \ x=\frac{1}{4} \ \eta \ x=\frac{1}{2} \ \ \mu\varepsilon \ \ \frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$$

$$9x^2-3x-2=0 \overset{\Delta=81}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1=-\frac{1}{3}<0 \ \ \alpha\pi o\rho\rho\iota\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota \\ x_2=\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{P(\Gamma)=\frac{2}{3}} \end{cases}$$

Β1.

Για τα ενδεχομενα Α, Β του δειγματικου χωρου Ω ειναι :

$A\cap B \subseteq A \subseteq A\cup B \Leftrightarrow P(A\cap B)\le P(A)\le P(A\cup B)$

Οποτε, $\boxed{P(A\cap B)=\frac{1}{4}}$, $\boxed{P(A)=\frac{1}{3}}$, $\boxed{P(A\cup B)=\frac{1}{2}}$

Β2.

Ειναι

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{3}+P(B)-\frac{1}{4}\Leftrightarrow P(B)=\frac{5}{12}$$

$$\bullet\ P(A'-B')=P(A')-P(A'\cap B')=1-P(A)-P[(A\cup B)']=1-P(A)-1+P(A\cup B)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$\bullet\ P(\Delta)=P[(A\cap B)']=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

Β3.

$$P(E)=P[(A-B)\cup(B-A)] \underset{\alpha\sigma\upsilon\mu\beta\iota\beta\alpha\sigma\tau\alpha}{\overset{A-B,\ B-A}{=}} P(A-B)+P(B-A)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{5}{12}-\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$$

Β4.

Ειναι

$$P(B)+P(\Gamma)=\frac{5}{12}+\frac{2}{3}=\frac{13}{12}>1$$

Οποτε τα ενδεχομενα Β και Γ **δεν** ειναι ασυμβιβαστα .

Προσφορα του enikos.gr και του http://mathslibrary4.blogspot.gr

3ο ΘΕΜΑ

Θεωρουμε ενα δειγμα ν παρατηρησεων μιας συνεχους ποσοτικης μεταβλητης Χ, τις οποιες ομαδοποιουμε σε 5 ισοπλατεις κλασεις , οπως παρουσιαζονται στον Πινακα Ι, οπου f_i %, i = 1, 2, 3, 4, 5 ειναι οι σχετικες συχνοτητες επι τοις εκατο των αντιστοιχων κλασεων. Θεωρουμε οτι οι παρατηρησεις καθε κλασης ειναι ομοιομορφα κατανεμημενες. Δινεται οτι :

- Το ποσοστο των παρατηρησεων του δειγματος που ειναι μικροτερες του 10 ειναι 10%.
- Το ποσοστο των παρατηρησεων του δειγματος που ειναι μεγαλυτερες η ισες του 16 ειναι 30%.
- Στο κυκλικο διαγραμμα σχετικων συχνοτητων, η γωνια του κυκλικου τομεα που αντιστοιχει στην 3η κλαση ειναι 108^o.
- Η μεση τιμη των παρατηρησεων του δειγματος ειναι $\bar{x} = 14$.

Κλασεις	f_i %
[8 , 10)	
[10 , 12)	
[12 , 14)	
[14 , 16)	
[16 , 18)	

Γ1. Να αποδειξετε οτι $f_1\% = 10, f_2\% = 10, f_3\% = 30, f_4\% = 20, f_5\% = 30$.
Δεν ειναι απαραιτητο να μεταφερετε στο τετραδιο σας τον **Πινακα Ι** συμπληρωμενο.

Μοναδες 6

Γ2. Να εξετασετε αν το δειγμα των παρατηρησεων ειναι ομοιογενες.
Δινεται οτι $\sqrt{6,6} \simeq 2,57$

Μοναδες 7

Γ3. Εστω x_1, x_2, x_3 και x_4 τα κεντρα της $1^{ης}$, $2^{ης}$, $3^{ης}$ και $4^{ης}$ κλασης αντιστοιχα και $ν_1$, $ν_2$, $ν_3$ και $ν_4$ οι συχνοτητες της $1^{ης}$, $2^{ης}$, $3^{ης}$ και $4^{ης}$ κλασης αντιστοιχα. Αν $\sum_{i=1}^{4} x_i ν_i = 1780$, να βρειτε το πληθος ν των παρατηρησεων του δειγματος.

Μοναδες 5

Γ4. Εστω $α_1$, $α_2$, $α_3$, $α_4$, $α_5$ πεντε τυχαια επιλεγμενες παρατηρησεις διαφορετικες μεταξυ τους απο το παραπανω δειγμα ν παρατηρησεων. Οριζουμε ως $\bar{α}$ τη μεση τιμη των πεντε αυτων παρατηρησεων και $S_α$ την τυπικη τους αποκλιση.

Εαν $β_i = \dfrac{α_i - \bar{α}}{S_α}$ για i =1, 2, 3, 4, 5, να δειξετε οτι η μεση τιμη $\bar{β}$ του δειγματος $β_i$, i=1, 2, 3, 4, 5 ειναι ιση με 0 και η τυπικη του αποκλιση $S_β$ ειναι ιση με 1.

Μοναδες 7

Προσφορα του e n i k o s . g r και του http://mathslibrary4.blogspot.gr

3ο ΛΥΣΗ

Γ1.

Ειναι

- $f_1\% = 10 \Leftrightarrow f_1 = 0{,}10$ (υποθεση)
- $f_5\% = 30 \Leftrightarrow f_5 = 0{,}30$ (υποθεση)
- $\alpha_3 = 108^0 \Leftrightarrow f_3 \cdot 360^0 = 108^0 \Leftrightarrow f_3 = 0{,}30$
- $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = 1 \Leftrightarrow f_2 + f_4 = 0{,}30 \Leftrightarrow f_2 = 0{,}30 - f_4 \quad (1)$

$\bar{x} = 14 \Leftrightarrow x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 + x_5 f_5 = 14 \Leftrightarrow$

$9 \cdot 0{,}10 + 11 \cdot (0{,}30 - f_4) + 13 \cdot 0{,}30 + 15 \cdot f_4 + 17 \cdot 0{,}30 = 14 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$

$f_2 = 0{,}10$ και $f_4 = 0{,}20$

Γ2.

$$s^2 = \sum_{\iota=1}^{5} (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i =$$
$$= (9-14)^2 \cdot 0{,}1 + (11-14)^2 \cdot 0{,}1 + (13-14)^2 \cdot 0{,}3 + (15-14)^2 \cdot 0{,}2 + (17-14)^2 \cdot 0{,}3 = 6{,}6$$

Αρα $s = \sqrt{6{,}6}$ και $CV = \dfrac{s}{\bar{x}} = \dfrac{\sqrt{6{,}6}}{14} = \dfrac{2{,}57}{14} \simeq 0{,}18 > 0{,}1$

Δηλαδη το δειγμα **δεν** ειναι ομοιογενες.

Γ3.

$$\sum_{\iota=1}^{4} x_i \cdot \nu_i = 1780 \overset{f_i = \frac{\nu_i}{\nu} \Leftrightarrow \nu_i = f_i \cdot \nu}{\Leftrightarrow} \sum_{\iota=1}^{4} x_i \cdot f_i \cdot \nu = 1780 \Leftrightarrow$$

$\nu \cdot (9 \cdot 0{,}1 + 11 \cdot 0{,}1 + 13 \cdot 0{,}3 + 15 \cdot 0{,}2) = 1780 \Leftrightarrow 8{,}9\nu = 1780 \Leftrightarrow \nu = 200$

Γ4.

Ειναι

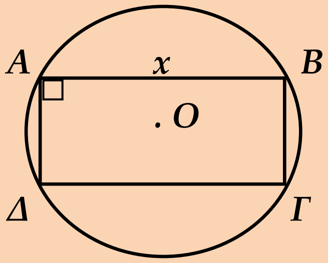
- $$\bar{\beta} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{\iota=1}^{5} \beta_i = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{\alpha_1 - \bar{\alpha}}{S_\alpha} + \frac{\alpha_2 - \bar{\alpha}}{S_\alpha} + \frac{\alpha_3 - \bar{\alpha}}{S_\alpha} + \frac{\alpha_4 - \bar{\alpha}}{S_\alpha} + \frac{\alpha_5 - \bar{\alpha}}{S_\alpha} \right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{\sum_{\iota=1}^{5} \alpha_i - 5\bar{\alpha}}{S_\alpha} \overset{\frac{\sum_{\iota=1}^{5} \alpha_i}{5} = \bar{\alpha}}{=}$$
$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{5\bar{\alpha} - 5\bar{\alpha}}{S_\alpha} = 0$$
- $$s_\beta^{\ 2} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{\iota=1}^{5} (\beta_i - \bar{\beta})^2 \overset{\bar{\beta}=0}{=} \frac{1}{5} \cdot \sum_{\iota=1}^{5} \beta_i^{\ 2} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{\iota=1}^{5} \left(\frac{\alpha_i - \bar{\alpha}}{S_\alpha} \right)^2 = \frac{1}{S_\alpha^{\ 2}} \cdot \frac{1}{5} \cdot \sum_{\iota=1}^{5} (\alpha_i - \bar{\alpha})^2 = \frac{1}{S_\alpha^{\ 2}} \cdot S_\alpha^{\ 2} = 1$$

  Αρα $s_\beta = 1$

Προσφορα του e n i k o s . g r και του http://mathslibrary4.blogspot.gr

4ο ΘΕΜΑ

Δινεται κυκλος (Ο, ρ) με κεντρο Ο και ακτινα $\rho = 5$ και ορθογωνιο ΑΒΓΔ εγγεγραμμενο στον κυκλο αυτον με πλευρα $AB = x$, οπως φαινεται στο **Σχημα Ι**.



Δ1. Να αποδειξετε οτι το εμβαδον του ορθογωνιου ΑΒΓΔ, ως συναρτηση του x, δινεται απο τον τυπο $f(x) = x\cdot\sqrt{100 - x^2}$, $0 < x < 10$.

Μοναδες 4

Δ2. Να βρειτε την τιμη του x για την οποια το εμβαδον του ορθογωνιου ΑΒΓΔ γινεται μεγιστο. Για την τιμη αυτην του x, δειξτε οτι το ορθογωνιο ΑΒΓΔ ειναι τετραγωνο.

Μοναδες 5

Δ3. Να υπολογισετε το οριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98\cdot x}$

Μοναδες 8

Δ4. Εστω Α, Β ενδεχομενα ενος δειγματικου χωρου Ω. Αν $P(A - B) > 0$, να δειξετε οτι

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\right) \le f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\right)$$

Μοναδες 8

Προσφορα του e n i k o s . g r και του http://mathslibrary4.blogspot.gr

4ο ΛΥΣΗ

Δ1.

Η ΒΔ ειναι διαμετρος ($A = 90^0$) οποτε απ'το Πυθαγορειο θεωρημα στο τριγωνο ΑΒΔ :

$$AB^2 + A\Delta^2 = B\Delta^2 \overset{\rho=5}{\Leftrightarrow} x^2 + A\Delta^2 = 100 \Leftrightarrow A\Delta = \sqrt{100 - x^2} \text{ με } 100 - x^2 \geq 0 \text{ αφου } 0 < x < 10$$

Το εμβαδον του ορθογωνιου ειναι : $E = AB \cdot A\Delta = x \cdot \sqrt{100 - x^2}$

Οποτε

$$f(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2}$$

Δ2.

Η συναρτηση f ειναι παραγωγισιμη στο (0, 1) με

$$f'(x) = x' \cdot \sqrt{100 - x^2} + x \cdot (\sqrt{100 - x^2})' = \sqrt{100 - x^2} + x \cdot \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 50 \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2}$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} > 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 50 \Leftrightarrow x < 5\sqrt{2}$: f γν. αυξουσα
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} < 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 > 50 \Leftrightarrow x > 5\sqrt{2}$: f γν. φθινουσα

Δηλαδη η f παρουσιαζει μεγιστο για $x = 5\sqrt{2}$

Το εμβαδον γινεται μεγιστο για $x = 5\sqrt{2}$, οποτε $A\Delta = \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = x$

Αρα για $x = 5\sqrt{2}$ το τετραπλευρο ειναι τετραγωνο .

Δ3.

Ειναι

- $f(1) = 1 \cdot \sqrt{100 - 1^2} = \sqrt{99}$
- $f'(1) = \dfrac{100 - 2 \cdot 1^2}{\sqrt{100 - 1^2}} = \dfrac{98}{\sqrt{99}} = \dfrac{98 \cdot \sqrt{99}}{99}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(1 + x) - \sqrt{99}}{98x} = \frac{1}{98} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{f(1 + x) - f(1)}{1 + x - 1} = \frac{1}{98} \cdot f'(1) = \frac{1}{\cancel{98}} \cdot \frac{\cancel{98} \cdot \sqrt{99}}{99} = \frac{\sqrt{99}}{99}$$

Δ4.

- Ειναι

$$\left.\begin{matrix} 0 < P(A) \leq 1 \\ 0 < P(A - B) \leq 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 0 < P^2(A) \leq 1 \\ 0 < P^2(A - B) \leq 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 0 > -P^2(A) \geq -1 \\ 0 > -P^2(A - B) \geq -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} 100 > 100 - P^2(A) \geq 99 \\ 100 > 100 - P^2(A - B) \geq 99 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 10 > \sqrt{100 - P^2(A)} \geq \sqrt{99} \\ 10 > \sqrt{100 - P^2(A - B)} \geq \sqrt{99} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

Προσφορα του *e n i k o s . g r* και του http://mathslibrary4.blogspot.gr

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{10}<\dfrac{1}{\sqrt{100-P^2(A)}}\le\dfrac{\sqrt{99}}{99}\\[2ex] \dfrac{1}{10}<\dfrac{1}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\le\dfrac{\sqrt{99}}{99}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}0<\dfrac{1}{\sqrt{100-P^2(A)}}\\[2ex] 0<\dfrac{1}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{100-P^2(A)}\cdot\sqrt{100-P^2(A-B)}}>0$$

- Η f ειναι γν. αυξουσα στο $(0,5\sqrt{2})$ αρα και στο $(0,1]$.

  Ετσι

  $A-B\subseteq A\Rightarrow P(A-B)\le P(A)\Rightarrow f(P(A-B))\le f(P(A))\Rightarrow$

  $$P(A-B)\cdot\sqrt{100-P^2(A-B)}\le P(A)\cdot\sqrt{100-P^2(A)}\ \underset{\frac{1}{\sqrt{100-P^2(A)}\cdot\sqrt{100-P^2(A-B)}}}{\overset{\text{πολλαπλασιαζουμε με}}{\Longrightarrow}}$$

  $$P(A-B)\cdot\cancel{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{100-P^2(A)}\cdot\cancel{\sqrt{100-P^2(A-B)}}}\le$$

  $$P(A)\cdot\cancel{\sqrt{100-P^2(A)}}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{100-P^2(A)}}\cdot\sqrt{100-P^2(A-B)}}\Rightarrow$$

  $$\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\le\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\ \underset{\text{στο }(0,1]}{\overset{f\uparrow}{\Longrightarrow}}\ f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\right)\le f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\right)$$

Προσφορα του enikos.gr και του http://mathslibrary4.blogspot.gr