ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ, 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 251, θεωρία, απόδειξη

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 273, θεωρία, ορισμός

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 150, θεωρία, ορισμός

Α4.

α) Λ

β) Σ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Έστω $z = x + yi, \quad x, y \in IR \Rightarrow z + \bar{z} = 2x, \quad |z|^2 = x^2 + y^2$

Η δοθείσα εξίσωση γράφεται ισοδυνάμως:

$$2\left(x^2 + y^2\right) + 2xi - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x^2 + y^2 - 2\right) + \left(x - 1\right)i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{και} \quad y = \pm 1$$

Άρα, $\underline{z = 1 + i \text{ ή } z = 1 - i}$

Χαριλάου Τρικούπη 155 Κηφισιά
Τηλ : 210 80 78 835, 210 80 02 355, Fax :210/8002356
www.diakrisi-edu.gr

B2.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-1+2i}{1^2+1^2}=i$$

$$\Rightarrow w=3\cdot(i)^{39}=3\cdot i^{9\cdot 4+3}=3\cdot i^3=-3i$$

$$(39=9\cdot 4+3)$$

B3.

$$|u-3i|=|4(1+i)-(1-i)-i| \quad \text{με } u=x+yi$$

$$\Rightarrow |x+yi-3i|=|3+4i|$$

$$\Rightarrow |x+(y-3)i|=|3+4i|^2$$

$$\Rightarrow x^2+(y-3)^2=3^2+4^2=25$$

Επομένως η εικόνα M(u) ανήκει στον κύκλο με κέντρο (0,3) και ακτίνα ρ = 5

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$h(x)=x-\ln\left(e^x+1\right)$$

$$h'(x)=1-\frac{1}{e^x+1}\cdot e^x=\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}>0\Rightarrow h \nearrow$$

$$h''(x)=\left(e^x+1\right)^{-1}=-\frac{1}{\left(e^x+1\right)^2}e^x<0$$

$$\Rightarrow h \quad \text{κοίλη}$$

Γ2.

$$h(x)=\ln e^x-\ln(e^x+1)=\ln\frac{e^x}{e^x+1}$$

$$h\left(2h'(x)\right)=\ln\frac{e^{2h'(x)}}{e^{2h'(x)}+1}$$

$$\Leftrightarrow e^{h\left(2h'(x)\right)}=e^{\ln\frac{e^{2h'(x)}}{e^{2h'(x)}+1}}\Leftrightarrow \frac{e^{2h'(x)}}{e^{2h'(x)}+1}<\frac{e}{e+1}$$

$$\Leftrightarrow e^{h(2h'(x))} < e^{h(1)} \overset{\nearrow}{\Leftrightarrow} h\left(2h'(x)\right) < h(1)$$

$$\overset{\nearrow}{\Leftrightarrow} 2h'(x) < 1 \Leftrightarrow h'(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{e^x+1} < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 < e^x + 1 \Leftrightarrow 1 < e^x \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$$

Γ3.

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x - \ln\left(e^x+1\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\ln e^x - \ln\left(e^x+1\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{e^x}{e^x+1} \overset{e^x=u}{=} \lim_{u\to+\infty} \ln\frac{u}{u+1} = \ln 1 = 0$$

Άρα η οριζόντια ασύμπτωτη είναι η **<u>y = 0</u>**

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-\ln\left(e^x+1\right)}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x+1} = 1$$

Άρα **<u>λ = 1</u>**

$$\lim_{x\to-\infty}\left(h(x) - \lambda x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left[-\ln\left(e^x+1\right)\right] = -\ln 1 = 0 = \beta$$

Άρα η πλάγια ασύμπτωτη είναι **<u>ε: y = x</u>**

Γ4.

$$\varphi(x)=e^x\left(h(x)+\ln 2\right)=e^x\left(\ln\frac{e^x}{e^x+1}+\ln 2\right)$$

$=e^x\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)$ για $x>0$ ισχύει $2e^x>e^x+1\Rightarrow\ln\frac{2e^x}{e^x+1}>\ln 1=0\Rightarrow\varphi(x)\geq 0\quad\forall x\geq 0$ (το ίσον ισχύει για $x=0$)

Επομένως το εμβαδόν του χωρίου ισούται με :

$$E=\int_0^1\varphi(x)dx\Rightarrow E=\int_0^1 e^x\cdot\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)dx=e^x\cdot\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)\Bigg]_0^1$$

$$-\int_0^1 e^x\frac{1}{e^x+1}\cdot dx=e^x\cdot\ln\frac{2e^x}{e^x+1}\Bigg]_0^1-\ln\left(e^x+1\right)\Big]_0^1$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

Επειδή

$$\left(\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)\right)'=\frac{e^x+1}{2e^x}\cdot\frac{2e^x\left(e^x+1\right)-2e^x\cdot e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=$$

$$=\frac{e^x+1}{2e^x}\cdot\frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{1}{e^x+1}$$

$$\Rightarrow E=e\cdot\ln\frac{2e}{e+1}-\ln\left(\frac{2}{2}\right)-\ln\left(e+1\right)+\ln 2$$

$$=\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)^e+\ln\frac{2}{e+1}=$$

$$=\ln\left[\left(\frac{2e}{e+1}\right)^e\cdot\frac{2}{e+1}\right]=\ln\left(\left(\frac{2}{e+1}\right)^{e+1}e^e\right)$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Αρκεί να δείξουμε ότι: $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=1$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\underset{d.LH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=e^0=1=f(0)$$

Για $x\neq 0$ έχουμε:

$$f'(x)=\left(\frac{e^x-1}{x}\right)'=\frac{e^x\cdot x-\left(e^x-1\right)}{x^2}=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$$

$$=\frac{e^x(x-1)+1}{x^2}\quad (x\neq 0),\quad x^2>0\quad \forall x\in IR^*$$

Ενώ για $x = 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\underset{d.LH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\underset{d.LH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f'(0)=\frac{1}{2}$$

Θεωρώ συνάρτηση

$g(x)=xe^x-e^x+1$

$g'(x)=e^x+xe^x-e^x=xe^x=0\Leftrightarrow x=0$

x		0	
g΄(x)	–	0	+
g(x)	↘		↗

Η g(x) παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = 0$

το $g(0) = 0 \Rightarrow xe^x-e^x+1\geq 0\quad \forall x\in IR$

Επομένως, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}>0$ για κάθε $x\in IR \Rightarrow f$ ↗ στο IR.

Δ2.

$$f''(x)=\frac{xe^x\cdot x^2-2x\left[e^x(x-1)+1\right]\left(e^x-1\right)}{x^4}=\frac{e^x\cdot x^3-2x^2e^x+2xe^x-2x}{x^4}\geq 0$$

α)

$$\int_1^{2f'(x)} f(u)\,du=0$$

Η f είναι συνεχής στο IR (ερωτ. Δ1)

Έστω $h(x)=\int_{1}^{2f'(x)} f(u)du \Rightarrow h'(x)=f(2f'(x))\cdot 2f''(x)$ (1)

$h(0)=\int_{1}^{2f'(0)} f(u)du = \int_{1}^{1} f(u)du = 0$

Επομένως το $x = 0$ είναι ρίζα της $h(x) = 0$

Έχουμε f κυρτή $\Rightarrow f''(x) > 0$

και $f'(x) > 0$ $\forall x \in IR$ (ερώτημα Δ1)

$\Rightarrow 2f'(x) > 0$

$f\nearrow \Rightarrow f(2f'(x)) > f(0) \Rightarrow f(2f'(x)) > 0$

(1)

$\Rightarrow h'(x) > 0$

$\Rightarrow h \nearrow$

Άρα η ρίζα $x = 0$ είναι μοναδική.

β)

$x'(t)=2y'(t)$

Από κανόνα αλυσίδας: $y'(t)=\frac{d}{dt}y=\frac{d}{dt}f(x)=\frac{d}{dx}f(x)\cdot\frac{dx}{dt}\Rightarrow y'(t)=f'(x)\cdot x'(t)$

$x'(t)=2\cdot f'(x)\cdot x'(t)$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow f'(x)=f'(0)$

$\nearrow$

$\Rightarrow x=0 \Rightarrow A\ (0,1)$

Δ3.

Για $x>0 \Rightarrow f(x)=\frac{e^x-1}{x} \Rightarrow xf(x)+1=e^x \Rightarrow$

$g(x)=(e^x-e)^2\cdot(x-2)^2$

$\Rightarrow g'(x)=2(e^x-e)\cdot e^x(x-2)^2+2(x-2)(e^x-e)^2$

$\Rightarrow g'(x)=2(e^x-e)\cdot(x-2)\left[e^x(x-2)+(e^x-e)\right]$

$\Rightarrow g'(x)=2(e^x-e)(x-2)(xe^x-2e^x+e^x-e)=2(e^x-e)(x-2)(xe^x-e^x-e)$

Έστω συνάρτηση $\varphi(x)=xe^x-e^x-e$

$\varphi'(x)=e^x+xe^x-e^x$

$\varphi'(x)=xe^x>0$ $\forall x>0$

$\varphi\nearrow$

και $\varphi(1) = -e < 0$

$$\varphi(2) = 2e^2 - e^2 - e = e^2 - e > 0$$

$\varphi(1)\,\varphi(2) < 0 \Rightarrow$ από θ. Bolzano υπάρχει μοναδική ρίζα $\rho \in (1,2)$ τέτοια ώστε $\varphi(\rho) = 0 \Rightarrow g'(\rho) = 0$

x		1		ρ		2	
$e^x - e$	–	0	+		+		+
x-2	–		–		–	0	+
φ(x)	–		–	0	+		+
g΄(x)	–	0	+	0	–	0	+
g(x)	↘	ΤΕ	↗	ΤΜ	↘	ΤΕ	↗

Επομένως η g παρουσιάζει δύο τοπικά ελάχιστα (στο x=1 και στο x=2) και ένα τοπικό μέγιστο στο x=ρ (1<ρ<2).

ΣΧΟΛΙΟ:

Τα φετινά θέματα ήταν κλιμακούμενης δυσκολίας και κάλυπταν το μεγαλύτερο μέρος της ύλης. Σε σχέση με τα περσινά κρίνονται σαφώς πιο βατά και περισσότερο μέσα στα πλαίσια της Γ' Λυκείου.

Συγκεκριμένα, το πρώτο ήταν εύκολη θεωρία, ορισμοί και σωστού λάθους ενώ το δεύτερο ένα βατό θέμα πάνω στους μιγαδικούς και δεν πρέπει να δυσκόλεψαν τους μαθητές.

Το τρίτο απαιτούσε γνώσεις από την Β'Λυκείου πάνω στους λογαρίθμους για να απαντήσει ο υποψήφιος πιο εύκολα στα ερωτήματα Γ2 και Γ3, ενώ το Γ4 είχε αρκετές και δύσκολες πράξεις στον υπολογισμό του ολοκληρώματος.

Το τέταρτο θέμα είχε στο ερώτημα Δ2α ρυθμό μεταβολής που δεν ήταν αναμενόμενο, ενώ απαιτητικά κρίνονται τα ερωτήματα Δ2α και Δ3 που όμως ήταν αντιμετωπίσιμα από τους καλά προετοιμασμένους υποψηφίους.

Γενικά έλλειπαν ερωτήματα πάνω στα πιο απαιτητικά θεωρήματα της ανάλυσης (ΘΜΤ, Rolle και συνέπειες τους) που τα προηγούμενα χρόνια δικαίως δυσκόλευαν τους υποψηφίους.

Επιμέλεια απαντήσεων: Όμηρος Κορακιανίτης
Κώστας Ανδρικίδης