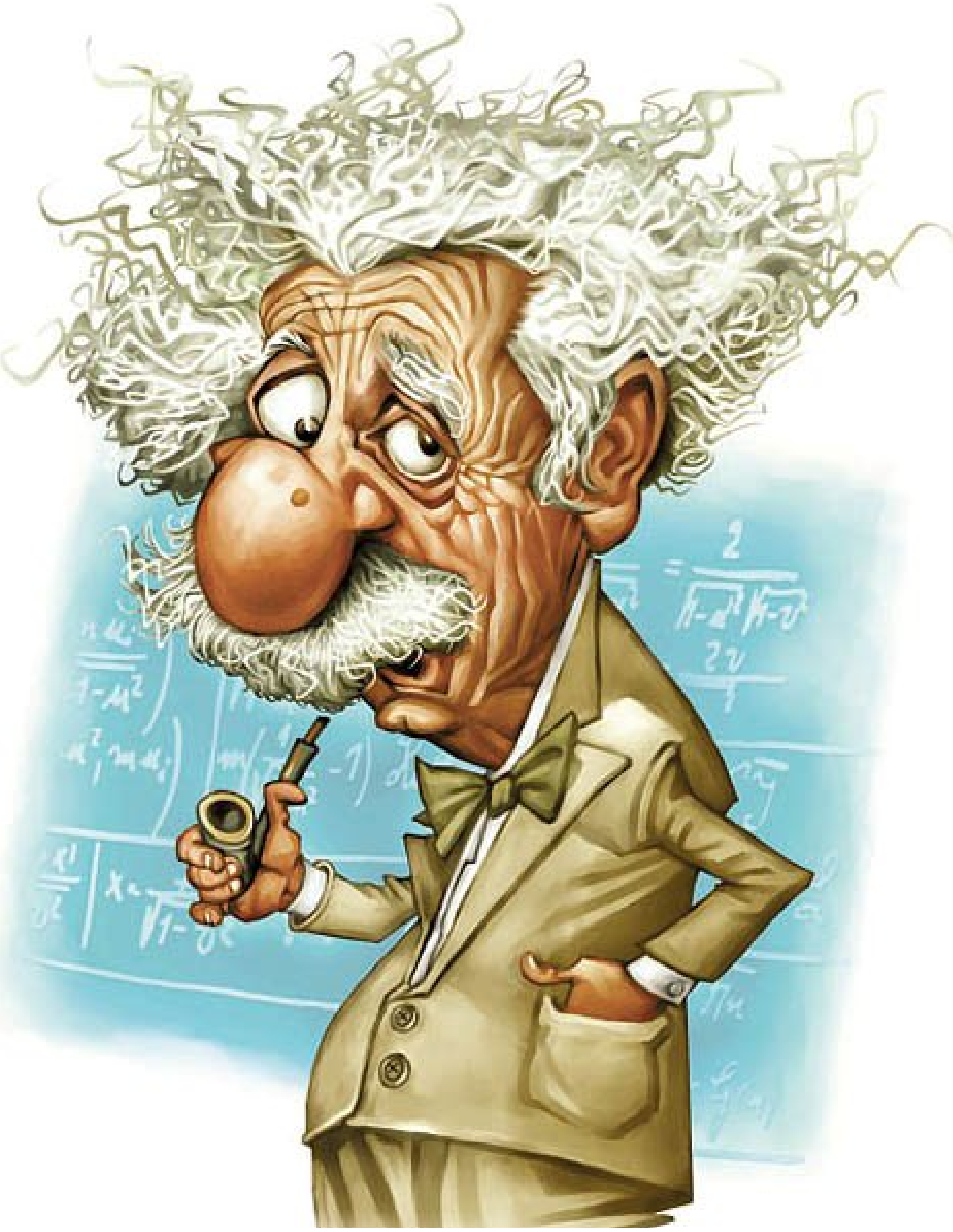


Π Α Ν Ε Λ Λ Η Ν Ι Ε Σ 2 0 1 4
Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Α Κ Α Ι Σ Τ Ο Ι Χ Ε Ι Α Σ Τ Α Τ Ι Σ Τ Ι Κ Η Σ

Ε π ι μ ε λ ε ι α : Τ α κ η ς Τ σ α κ α λ α κ ο ς

1ο ΘΕΜΑ

Α1. Αν η συναρτηση f ειναι παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$ και c σταθερος πραγματικος αριθμος, να αποδειξετε με τη χρηση του ορισμου της παραγωγου οτι $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, για καθε $x \in \mathbb{R}$

Μοναδες 7

Α2. Ποτε μια συναρτηση f λεγεται γνησιως φθινουσα σε ενα διαστημα Δ του πεδιου ορισμου της;

Μοναδες 4

Α3. Ποτε μια ποσοτικη μεταβλητη λεγεται διακριτη και ποτε συνεχης;

Μοναδες 4

Α4. Να χαρακτηρισετε τις προτασεις που ακολουθουν, γραφοντας στο τετραδιο σας διπλα στο γραμμα που αντιστοιχει σε καθε προταση τη λεξη **Σωστο**, αν η προταση ειναι σωστη, η **Λαθος**, αν η προταση ειναι λανθασμενη.

α) Εαν για τη συναρτηση f ισχυει $f'(x_0) = 0$, για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, και η παραγωγος της f' διατηρει προσημο εκατερωθεν του x_0, τοτε η f ειναι γνησιως μονοτονη στο (α, β) και δεν παρουσιαζει ακροτατο στο διαστημα αυτο .

(μοναδες 2)

β) Για δυο οποιαδηποτε ενδεχομενα Α, Β ενος δειγματικου χωρου Ω ισχυει: $P(A - B) = P(B) - P(A \cap B)$

(μοναδες 2)

γ) Σε μια κανονικη η περιπου κανονικη κατανομη το 95% περιπου των παρατηρησεων βρισκονται στο διαστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$, οπου $\bar{x}$ η μεση τιμη και s η τυπικη αποκλιση των παρατηρησεων .

(μοναδες 2)

δ) Αν x_i ειναι τιμη μιας ποσοτικης μεταβλητης Χ, τοτε η αθροιστικη συχνοτητα N_i εκφραζει το πληθος των παρατηρησεων που ειναι μεγαλυτερες της τιμης x_i

(μοναδες 2)

ε) Το κυκλικο διαγραμμα ειναι ενας κυκλικος δισκος χωρισμενος σε κυκλικους τομεις, τα εμβαδα η, ισοδυναμα, τα τοξα των οποιων ειναι αναλογα προς τις αντιστοιχες συχνοτητες ν_i η τις σχετικες συχνοτητες f_i των τιμων x_i της μεταβλητης .

(μοναδες 2)

Μοναδες 10

1ο ΛΥΣΗ

Α1.

Εστω η συναρτηση $F(x) = cf(x)$. Εχουμε

$F(x + h) - F(x) = cf(x + h) - cf(x) = c \cdot (f(x + h) - f(x))$, και για $h \neq 0$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{c(f(x+h)-f(x))}{h} = c \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Επομενως

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} [c \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h}] = c \cdot f'(x)$$

Αρα

$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, για καθε $x \in \mathbb{R}$

Α2.

Μια συναρτηση f λεγεται γνησιως φθινουσα σ'ενα διαστημα Δ του πεδιου ορισμου της, οταν για οποιαδηποτε σημεια $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχυει $f(x_1) > f(x_2)$.

Α3.

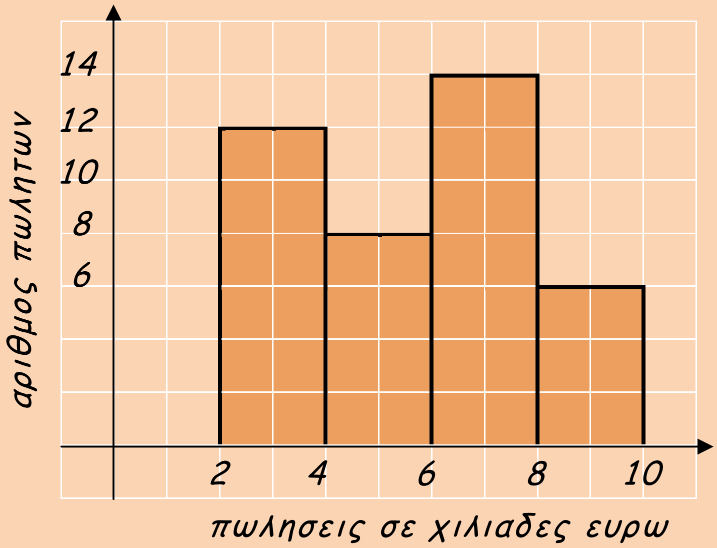
- **διακριτες** μεταβλητες, ειναι οι ποσοτικες μεταβλητες, που παιρνουν μονο "μεμονωμενες" τιμες.
  Τετοιες μεταβλητες ειναι, για παραδειγμα, ο αριθμος των υπαλληλων μιας επιχειρησης (με τιμες 1,2,...), το αποτελεσμα της ριψης ενος ζαριου (με τιμες 1,2,...,6) κτλ.
- **συνεχεις** μεταβλητες, ειναι οι ποσοτικες μεταβλητες, που μπορουν να παρουν οποιαδηποτε τιμη ενος διαστηματος πραγματικων αριθμων (α, β).
  Τετοιες μεταβλητες ειναι το υψος και το βαρος των μαθητων της Γ΄ Λυκειου, ο χρονος που χρειαζονται οι μαθητες να απαντησουν στα θεματα μιας εξετασης, η διαρκεια μιας τηλεφωνικης συνδιαλεξης κτλ.

Α4.

α) Σωστο
β) Λαθος
γ) Λαθος
δ) Λαθος
ε) Σωστο

2ο ΘΕΜΑ

Στο παρακατω σχημα φαινεται το ιστογραμμα συχνοτητων, το οποιο παριστανει τις πωλησεις σε χιλιαδες ευρω που εγιναν απο τους πωλητες μια εταιρειας κατα τη διαρκεια ενος ετους .



Β1. Να βρειτε το πληθος των πωλητων της εταιρειας .

Μοναδες 5

Β2. Να μεταφερετε στο τετραδιο σας τον παρακατω πινακα συχνοτητων της κατανομης των πωλησεων καταλληλα συμπληρωμενο, δικαιολογωντας τη στηλη με τις σχετικες συχνοτητες f_i , $i = 1, 2, 3, 4$

Κλασεις	Κεντρικες τιμες x_i	Συχνοτητα v_i	Σχετικη Συχνοτητα f_i
[* , *)			
[* , *)			
[* , *)			
[* , *)			
Συνολο			

Μοναδες 8

Β3. α) Να υπολογισετε τη μεση τιμη των πωλησεων του ετους .

(μοναδες 6)

β) Να βρειτε το πληθος των πωλητων που εκαναν πωλησεις τουλαχιστον 4,5 χιλιαδων ευρω (θεωρουμε οτι οι παρατηρησεις καθε κλασης ειναι ομοιομορφα κατανεμημενες) .

(μοναδες 6)

Μοναδες 12

2ο ΛΥΣΗ

Β1.

$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 12 + 8 + 14 + 6 = 40$

Το πληθος των πωλητων ειναι 40 .

Β2.

Κλασεις	Κεντρικες τιμες x_i	Συχνοτητα ν_i	Σχετικη Συχνοτητα f_i
[2 , 4)	3	12	0,3
[4 , 6)	5	8	0,2
[6 , 8)	7	14	0,35
[8 , 10)	9	6	0,15
Συνολο		40	1

Απ'τον τυπο $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$ $i = 1, 2, 3, 4$ προκυπτει

- $f_1 = \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{12}{40} = 0{,}3$
- $f_2 = \frac{\nu_2}{\nu} = \frac{8}{40} = 0{,}2$
- $f_3 = \frac{\nu_3}{\nu} = \frac{14}{40} = 0{,}35$
- $f_4 = \frac{\nu_4}{\nu} = \frac{6}{40} = 0{,}15$

Β3.

α) Ειναι

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i}{\nu} = \frac{3 \cdot 12 + 5 \cdot 8 + 7 \cdot 14 + 9 \cdot 6}{40} = \frac{36 + 40 + 98 + 54}{40} = \frac{228}{40} = 5{,}7$$

Η μεση τιμη των πωλησεων του ετους ειναι 5,7 χιλιαδες ευρω .

β)

Εστω x το ζητουμενο πληθος των πωλητων

- [4, 6) $c_1 = 6 - 4 = 2$ πληθος 8
- [4, 6) $c_2 = 6 - 4{,}5 = 1{,}5$ πληθος x

Αρα $\frac{2}{1{,}5} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 6$

Οποτε το πληθος των πωλητων: 6 + 14 + 6 = 26

3ο ΘΕΜΑ

Ενα δοχειο περιεχει κοκκινε (Κ), ασπρες (Α) και πρασινες (Π) μπαλες . Επιλεγουμε τυχαια μια μπαλα. Η πιθανοτητα να προκυψει κοκκινη μπαλα ειναι $P(K) = x_1$, ενω η πιθανοτητα να προκυψει ασπρη μπαλα ειναι $P(A) = x_2$, οπου x_1, x_2 ειναι οι θεσεις των τοπικων ακροτατων της συναρτησης

$$f(x) = 4x^3 - \frac{7}{2}x^2 + x - 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{με } x_1 < x_2$$

Γ1. *Να βρειτε τις πιθανοτητες P(Κ), P(Α) και P(Π), οπου P(Π) η πιθανοτητα να προκυψει πρασινη μπαλα .*

Μοναδες 10

Γ2. *Αν $P(K) = \frac{1}{4}$ και $P(A) = \frac{1}{3}$, να βρειτε τις πιθανοτητες των παρακατω ενδεχομενων :*

Γ: « η μπαλα που επιλεγεται τυχαια να ειναι κοκκινη η ασπρη »

Δ: « η μπαλα που επιλεγεται τυχαια να ειναι ουτε κοκκινη ουτε ασπρη »

Ε: « η μπαλα που επιλεγεται τυχαια να ειναι ασπρη η να μην ειναι πρασινη »

Μοναδες 9

Γ3. *Αν οι ασπρες μπαλες ειναι κατα τεσσερις (4) λιγοτερες απο τις πρασινες μπαλες, να βρειτε ποσες μπαλες εχει το δοχειο .*

Μοναδες 6

3ο ΛΥΣΗ

Γ1

$$f'(x)=12x^2-7x+1=0:\begin{cases}\alpha=12\\ \beta=-7\\ \gamma=+1\end{cases} \text{ τοτε } \begin{cases}\Delta=(-7)^2-4\cdot 12\cdot 1=49-48=1>0\\ x_{1,2}=\dfrac{-(-7)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 12}=\dfrac{7\pm 1}{24}\begin{cases}x_1=\dfrac{7-1}{24}=\dfrac{1}{4}\\ x_2=\dfrac{7+1}{24}=\dfrac{1}{3}\end{cases}\end{cases}$$

- $P(K)=x_1=\dfrac{1}{4}$
- $P(A)=x_2=\dfrac{1}{3}$
- $P(\Pi)=1-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{12}{12}-\dfrac{4}{12}-\dfrac{3}{12}=\dfrac{5}{12}$

Γ2.

- $P(\Gamma)=P(K\cup A)=P(K)+P(A)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{3}{12}+\dfrac{4}{12}=\dfrac{7}{12}$ (Α και Κ ασυμβιβαστα)
- $P(\Delta)=P((K\cup A)')=P(\Pi)=\dfrac{5}{12}$
- $P(E)=P(A\cup\Pi')=P(A)+P(\Pi')-P(A\cap\Pi')=P(A)+1-P(\Pi)-P(A)=1-P(\Pi)=$

  $=1-\dfrac{5}{12}=\dfrac{7}{12}$

Γ3:

Ειναι

$N(A)=N(\Pi)-4$ (διαιρουμε με $N(\Omega)$)

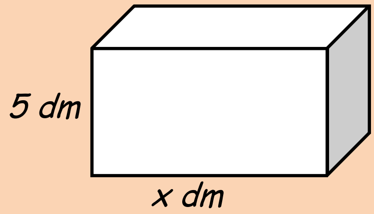
$$\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{N(\Pi)}{N(\Omega)}-\frac{4}{N(\Omega)}\Rightarrow P(A)=P(\Pi)-\frac{4}{N(\Omega)}\Rightarrow\frac{4}{12}=\frac{5}{12}-\frac{4}{N(\Omega)}\Rightarrow\frac{4}{N(\Omega)}=\frac{1}{12}\Rightarrow$$

$N(\Omega)=48$

Αρα το δοχειο περιεχει 48 μπαλες .

4ο ΘΕΜΑ

Θεωρουμε ενα κουτι σχηματος ορθογωνιου παραλληλεπιπεδου με βαση ορθογωνιο και **ανοικτο απο πανω**.



Το υψος του κουτιου ειναι 5 dm.
Η βαση του κουτιου εχει σταθερη περιμετρο 20 dm και μια πλευρα της ειναι x dm με $0 < x < 10$

Δ1. Να αποδειξετε οτι η συνολικη επιφανεια του κουτιου ως συναρτηση του x ειναι
$E(x) = -x^2 + 10x + 100,\ x \in (0, 10)$
και να βρειτε για ποια τιμη του x το κουτι εχει μεγιστη επιφανεια.

Μοναδες 8

Στη συνεχεια, θεωρουμε τα σημεια $A_i(x_i, y_i)$ οπου $y_i = E(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, 15$ με $5 = x_1 < x_2 < \ldots < x_{14} < x_{15} = 9$

Δ2. Αν το δειγμα των τετμημενων x_i, $i = 1, 2, \ldots, 15$ των παραπανω σημειων $A_i(x_i, y_i)$

- δεν ειναι ομοιογενες
- εχει μεση τιμη $\bar{x} = 8$ και
- τυπικη αποκλιση s τετοια, ωστε $2s^2 - 5s + 2 = 0$ τοτε:

α) να αποδειξετε οτι $s = 2$

(μοναδες 4)

β) να βρειτε τη μεση τιμη των x_i^2, με $i = 1, 2, \ldots, 15$

Δινεται οτι: $s^2 = \dfrac{1}{v}\left(\sum_{i=1}^{v} t_i^2 - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{v} t_i\right)^2}{v}\right)$

(μοναδες 4)

Μοναδες 8

Δ3. Επιλεγουμε τυχαια ενα απο τα παραπανω σημεια $A_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, 15$
Να βρειτε τη πιθανοτητα του ενδεχομενου:
$B = \{ A_i(x_i, y_i),\ i = 1, 2, \ldots, 15$ τετοια, ωστε $y_i > -4x_i + 9R + 1 \}$,
οπου R ειναι το ευρος των $y_i = E(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, 15$

Μοναδες 9

4ο ΛΥΣΗ

Δ1

Εστω y η αλλη πλευρα της βασης . Ετσι η περιμετρος της βασης ειναι :

$\Pi = 20 \Rightarrow 2x + 2y = 20 \Rightarrow x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$

- $E = 2 \cdot 5 \cdot x + 2 \cdot 5 \cdot y + x \cdot y = 10 \cdot x + 10 \cdot (10 - x) + x \cdot (10 - x) =$

  $= 10 \cdot x + 100 - 10 \cdot x + 10 \cdot x - x^2 = -x^2 + 10 \cdot x + 100, \quad x \in (0, 10)$

- $E'(x) = -2x + 10$

  $E'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 10 = 0 \Rightarrow x = 5$

  $E'(x) > 0 \Rightarrow -2x + 10 > 0 \Rightarrow x < 5$ (η E(x) γν. αυξουσα)

  $E'(x) < 0 \Rightarrow -2x + 10 < 0 \Rightarrow x > 5$ (η E(x) γν. φθινουσα)

  Αρα η επιφανεια γινεται μεγιστη για x = 5 .

Δ2

α)

$$2s^2 - 5s + 2 = 0 : \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -5 \\ \gamma = 2 \end{cases} \text{ τοτε } \begin{cases} \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 > 0 \\ s_{1,2} = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \dfrac{5 \pm 3}{4} \begin{cases} s_1 = \dfrac{5+3}{4} = 2, \text{δεκτη} \\ s_2 = \dfrac{5-3}{4} = \dfrac{1}{2} \text{ απορριπτεται} \end{cases} \end{cases}$$

Αφου, το δειγμα δεν ειναι ομοιογενες οποτε : $CV(x) > 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{s}{\bar{x}} \geq 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{s}{8} \geq 0{,}1 \Rightarrow s \geq 0{,}8$

β)

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}{\nu} - \frac{(\sum_{i=1}^{\nu} x_i)^2}{\nu^2} \Rightarrow s^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \Rightarrow \overline{x^2} = s^2 + \bar{x}^2 \Rightarrow \overline{x^2} = 2^2 + 8^2 \Rightarrow \overline{x^2} = 68$$

Δ3

- Η συναρτηση ειναι γν.φθινουσα στο διαστημα [5, 9] , οποτε : $x_1 < x_2 \Leftrightarrow E(x_1) < E(x_2)$.
  - $y_{15} = E(x_{15}) = -9^2 + 10 \cdot 9 + 100 = -81 + 90 + 100 = 109$
  - $y_1 = E(x_1) = -5^2 + 10 \cdot 5 + 100 = -25 + 50 + 100 = 125$

  $R = y_1 - y_{15} = 125 - 109 = 16$

  - $y_i > -4x_i + 9 \cdot 16 + 1 \Leftrightarrow -x_i^2 + 10x + 100 > -4x_i + 145 \Leftrightarrow$

    $x_i^2 - 14x_i + 45 < 0$

    Ετσι $x_1 = 5 < x_i < 9 = x_{15}$

  Οποτε το ενδεχομενο Β:

  $B = \{(x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (x_{14}, y_{14})\}$ με $N(B) = 13$

  Αρα

  $P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{13}{15}$