Απολυτήριες εξετάσεις Γ΄ Τάξης

Ημερήσιου Γενικού Λυκείου

Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

20 Μαΐου 2013

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 28

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 14

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 87

Α4

α) Λ

β) Σ

γ) Λ

δ) Λ

ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Έχουμε $P(\omega_1) = -\frac{1}{2}\ \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}^2-1}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)}$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x+1-1}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)}$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{1\cdot 2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

Επομένως $P(\omega_1) = \frac{1}{4}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \left(\frac{x}{3}\right)' lnx + \frac{x}{3}(lnx)' = \frac{1}{3}lnx + \frac{x}{3}\frac{1}{x} = \frac{1}{3}(lnx+1).$$

Ο ρυθμός μεταβολής της f στο $x_o = 1$ είναι $f'(1) = \frac{1}{3}(ln1+1) = \frac{1}{3}$.

Συνεπώς $P(\omega_3) = \frac{1}{3}$.

B2.

$\frac{1}{3} \leq P(A') \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq P(A')$ (1) και $P(A') \leq \frac{3}{4}$ (2)

$(2) \quad \Leftrightarrow 1 - P(A) \leq \dfrac{3}{4}$

$\Leftrightarrow 1 - \dfrac{3}{4} \leq P(A)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{4} \leq P(A) \qquad (3)$

Έχουμε:

$\omega_1 \subseteq A \Rightarrow P(\omega_1) \leq P(A) \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} \leq P(A)$

Άρα η (3) ισχύει.

Είναι: $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$

$\omega_3 \subseteq A' \Leftrightarrow P(\omega_3) \leq P(A') \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} \leq P(A')$

Άρα $\frac{1}{3} \leq P(A') \leq \frac{3}{4}$

B3.

$P(A') = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow P(\omega_2) + P(\omega_3) = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow P(\omega_2) + \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow$

$P(\omega_2) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow P(\omega_2) = \dfrac{5}{12}$

Επειδή $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ τότε:

$P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{12} + \dfrac{1}{3} + P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{3+5+4}{12} + P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow P(\omega_4) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} A - B = \{\omega_4\}, \quad \text{οπότε} \quad P(A-B) = P(\omega_4) = 0 \\ B - A = \{\omega_3\}, \quad \text{οπότε} \quad P(B-A) = P(\omega_3) = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow P[(A-B) \cup (B-A)]$$

$$= 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$A' = \{\omega_2, \omega_3\}, \quad B' = \{\omega_2, \omega_4\}$

$A' - B' = \{\omega_3\}$

$P(A' - B') = P(\omega_3) = \frac{1}{3}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Έχουμε:

Κλάσεις	x_i
[50, 50 + c)	…
[50 + c, 50 + 2c)	…
[50 + 2c, 50 + 3c)	…
[50 + 3c, 50 + 4c)	85

Επειδή $x_4 = 85$ τότε $\frac{50+3c+50+4c}{2} = 85 \Leftrightarrow 100 + 7c = 170 \Leftrightarrow 7c = 70 \Leftrightarrow c = 10$

Γ2.

Έχουμε $f_4 = 2f_3$ (1) από υπόθεση.

Επειδή $\delta = 75$, τότε $f_1 + f_2 + \frac{1}{2}f_3 = 0{,}5$ (2)

$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \overset{(1)}{\underset{(2)}{\Rightarrow}} 0{,}5 - \frac{1}{2}f_3 + f_3 + 2f_3 = 1 \Rightarrow$

$\frac{5}{2}f_3 = 0{,}5 \Leftrightarrow f_3 = \frac{1}{5} = 0{,}2$

(1) $\Leftrightarrow f_4 = 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}4$

$f_1 + f_2 = 1 - 0{,}2 - 0{,}4 \Leftrightarrow f_1 + f_2 = 0{,}4$ (3)

Ισχύει: $\bar{x} = \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot f_i \Leftrightarrow 74 = 55 \cdot f_1 + 65 \cdot f_2 + 75 \cdot f_3 + 85 \cdot f_4 \Leftrightarrow$

$74 = 55 \cdot f_1 + 65 \cdot f_2 + 75 \cdot 0{,}2 + 85 \cdot 0{,}4 \Leftrightarrow$

$11f_1 + 13f_2 = 5$ (4)

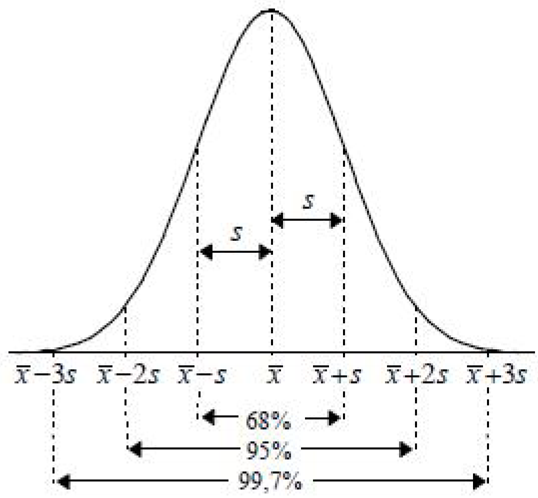
Από σύστημα (3) και (4) προκύπτει: $\mathbf{f_2 = 0{,}3}$ **και** $\mathbf{f_1 = 0{,}1}$

Κλάσεις	x_i	f_i
[50, 60)	55	0,1
[60, 70)	65	0,3
[70, 80)	75	0,2
[80, 90)	85	0,4
ΣΥΝΟΛΟ	x_i	1

Γ3.

$$\bar{x} = \frac{55 \cdot 0{,}1v + 65 \cdot 0{,}3v + 75 \cdot 0{,}2v}{0{,}6v} = \frac{3{,}5 + 19{,}5 + 15}{0{,}6} = \frac{40}{0{,}6} = \frac{200}{3}$$

Γ4.



Το τουλάχιστον 2,5% αντιστοιχεί στο άκρο $\bar{x} + 2s$ οπότε $\bar{x} + 2s = 74$ (1)
Το 16% αντιστοιχεί στο άκρο $\bar{x} - s$ οπότε $\bar{x} - s = 68$ (2)

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x} + 2s = 74\\ \bar{x} - s = 68\end{array}\right\} \overset{(-)}{\Rightarrow} 3s = 6 \Leftrightarrow s = 2$$

Οπότε (1) $\Leftrightarrow$ $\bar{x} + 4 = 74$
$\boldsymbol{\bar{x} = 70}$

CV $= \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{70} \approx 02{,}02\%$ άρα είναι ομοιογενές ή
$\frac{2}{70} \leq \frac{1}{10} \Rightarrow 20 \leq 70$ που ισχύει, άρα ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.
$f(x) = x\ln x + \kappa$
$\Rightarrow f'(x) = \ln x + 1$
Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο Α(1,f(1)), δηλαδή στο Α(1,κ) έχει εξίσωση:
$$y - \kappa = f'(1)(x - 1) \quad y = x - 1 + \kappa$$
Για $y = 0$: $x - 1 + \kappa = 0$, άρα $x = 1 - \kappa$, οπότε η (ε) τέμνει τον x΄x στο σημείο Β(1 – κ,0).
Για $x = 0$: $y = \kappa - 1$, οπότε η (ε) τέμνει τον y΄y στο σημείο Γ(0,κ – 1).
$E = (ΟΒΓ) = ½\,|\kappa - 1|\,|1 - \kappa| = ½\,(\kappa - 1)^2$
Έχουμε $½\,(\kappa - 1)^2 < 2 \Leftrightarrow (\kappa-1)^2<4 \Leftrightarrow 0<\kappa-1<2 \Leftrightarrow 1<\kappa<3$ και επειδή κ ακέραιος κ=2.

Δ2.
α) y = x + 1 ⇔ $\bar{y} = \bar{x} + 1$ ⇔ $31 = \bar{x} + 1$ ⇔ $\bar{x} = 30$.
β) z_i : $x_1 + 3, x_2 + 3, \ldots, x_{20} + 3, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{35}, x_{36} - \lambda, x_{37} - \lambda, \ldots, x_{50} - \lambda$,
για i = 1, 2, ..., 50.

$$\overline{z_i} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{20}+60+x_{21}+\cdots+x_{35}+x_{36}+\ldots+x_{50}-15\lambda}{50}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + \ldots + x_{50} + 60 - 15\lambda}{50}$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} + \frac{6}{5} - \frac{15\lambda}{50} = 31$$

$$30 + \frac{6}{5} - \frac{15\lambda}{50} = 31$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

Δ3.
f(x) = xlnx + 2, άρα f(α) = αlnα + 2
f(β) = βlnβ + 2
f(γ) = γlnγ + 2
f(e) = e + 2
f΄(x) = lnx + 1 = 0 ⇔ x = $\frac{1}{e}$, συνεπώς f΄(1/e) = ln$\frac{1}{e}$ + 1 = 0 και f΄(x) > 0 για x > 1/e ⇒
f ↗για x > 1/e/

Για x > $\frac{1}{e} \overset{f\uparrow}{\Rightarrow}$ f(x) > f(1/e) > 0 = f΄(1/e) ⇔ 0 < f(α) < f(β) < f(γ) < f(e) ⇔
Εύρος: R = f(e) – f΄(1/e) = e + 2
και μέση τιμή:

$$\bar{z} = \frac{f(a) + f(\beta) + f(\gamma) + f(e) + f'(1/e)}{5}$$
$$= \frac{a\ln a+\beta\ln\beta+\gamma\ln\gamma+8+e}{5} = \frac{\ln\alpha^{\alpha}+\ln\beta^{\beta}+\ln\gamma^{\gamma}+8+e}{5}$$
$$= \frac{\ln(\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}\gamma^{\gamma})+8+e}{5} = \frac{\ln e^{7}+8+e}{5} = \frac{15+e}{5}.$$

Δ4.
Για το ενδεχόμενο Α έχουμε: f ΄ (t)>0 ⇔lnt+1>0⇔lnt>-1⇔t>1/e
Άρα Α={$t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{30}$}
Για το ενδεχόμενο Β έχουμε: f(t)>f ΄(t) +1 ⇔tlnt+2>lnt+2⇔(t-1)lnt>0 που ισχύει για κάθε t>1.
Επομένως Β={$t_1, t_2, \ldots, t_{29}$}
α) P(A) = $\frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$
P(A∩B)=$\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)} = \frac{19}{30}$

Επιμέλεια απαντήσεων:
Βασίλης Ζαραφέτας
Βασίλης Ζούκος
Όμηρος Κορακιανίτης